
Ajustement du modèle de croissance logistique aux données de Verhulst

J.R. Lobry

Ajustement par régression non-linéaire du modèle de croissance de Verhulst aux données de Verhulst.



Pierre-François Verhulst (1804-1849)
Portrait gravé par Flameng tiré de [2]

1 Les données

Elles sont extraites du tableau page 8 du deuxième mémoire de Verhulst [7] lu à la séance de l'Académie royale du 15 mai 1846 et reproduites ici dans la table 1. Le tableau original est introduit par la phrase suivante :

Bien qu'une période de trente années soit beaucoup trop courte pour qu'on puisse conclure quelque chose de l'accord de notre théorie avec les résultats de l'observation, peut-être le lecteur ne verra-t-il pas sans intérêt le tableau ci dessous :

Importer les données sous  :

```
ver <- read.table("http://pbil.univ-lyon1.fr/R/donnees/VerhulstPF1847.txt",
  sep = "\t", header = TRUE)
ver
  t      obs      theo
1 1815 3627253 3627300
2 1825 4024855 4048200
3 1826 4073751 4088600
4 1827 4118840 4128600
5 1828 4160279 4168500
6 1829 4210128 4207900
7 1830 4247113 4247100
8 1831 4285969 4286000
9 1832 4326697 4324600
10 1833 4345940 4362900
11 1834 4376214 4400900
12 1835 4404220 4438600
13 1836 4448769 4476000
14 1837 4494688 4513100
15 1838 4525687 4549900
16 1839 4570708 4586400
17 1840 4608776 4622600
18 1841 4650400 4658500
19 1842 4693190 4694100
20 1843 4727391 4729400
21 1844 4763246 4764400
22 1845 4800861 4799100
```

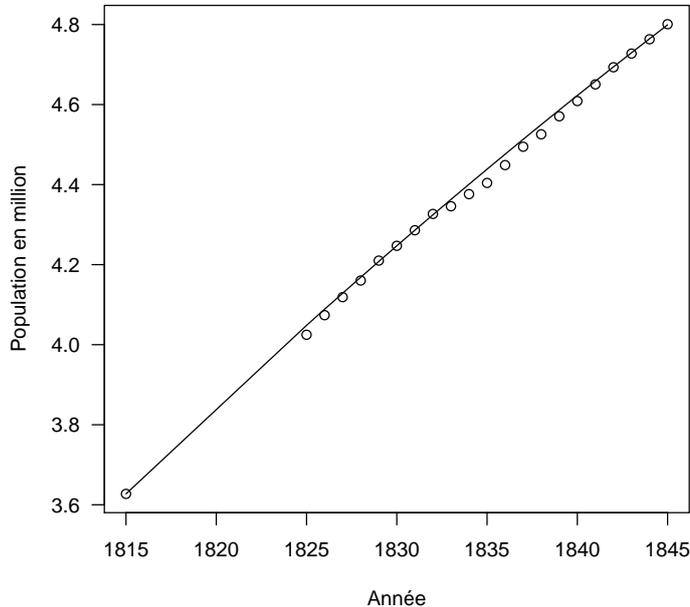
Représenter les données :

| | t | obs | theo |
|----|------|---------|---------|
| 1 | 1815 | 3627253 | 3627300 |
| 2 | 1825 | 4024855 | 4048200 |
| 3 | 1826 | 4073751 | 4088600 |
| 4 | 1827 | 4118840 | 4128600 |
| 5 | 1828 | 4160279 | 4168500 |
| 6 | 1829 | 4210128 | 4207900 |
| 7 | 1830 | 4247113 | 4247100 |
| 8 | 1831 | 4285969 | 4286000 |
| 9 | 1832 | 4326697 | 4324600 |
| 10 | 1833 | 4345940 | 4362900 |
| 11 | 1834 | 4376214 | 4400900 |
| 12 | 1835 | 4404220 | 4438600 |
| 13 | 1836 | 4448769 | 4476000 |
| 14 | 1837 | 4494688 | 4513100 |
| 15 | 1838 | 4525687 | 4549900 |
| 16 | 1839 | 4570708 | 4586400 |
| 17 | 1840 | 4608776 | 4622600 |
| 18 | 1841 | 4650400 | 4658500 |
| 19 | 1842 | 4693190 | 4694100 |
| 20 | 1843 | 4727391 | 4729400 |
| 21 | 1844 | 4763246 | 4764400 |
| 22 | 1845 | 4800861 | 4799100 |

TAB. 1 – Des progrès de la population en Belgique. t représente le temps (années), obs la population observée, et theo la population calculée par Verhulst avec son modèle logistique.

```
plot(ver$t, ver$obs/10^6, las = 1, main = "Croissance de la population en Belgique",  
      xlab = "Année", ylab = "Population en million")  
lines(ver$t, ver$theo/10^6)
```

Croissance de la population en Belgique



2 Le modèle

Sur les aspects historiques de la découverte du modèle de croissance logistique on pourra lire en français les références [3, 1]. Il y a quatre articles publiés par Verhulst sur le modèle logistique [4, 5, 6, 7]. La forme moderne (celle où il n'y a plus de problème d'homogénéité du point de vue des dimension) a été publiée dans [7] et correspond à un modèle de croissance exponentiel avec un terme de freinage :

$$\frac{dx}{dt} = \mu x \underbrace{\left(1 - \frac{x}{x_m}\right)}_{\text{freinage}}$$

où μ est le taux de croissance en l'absence de freinage et x_m la population maximale. Il s'intègre en :

$$x(t) = \frac{x_m x_0 e^{\mu(t-t_0)}}{x_m - x_0 + x_0 e^{\mu(t-t_0)}}$$

On a :

$$x(t_0) = x_0 \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x_m$$

3 Estimation des paramètres

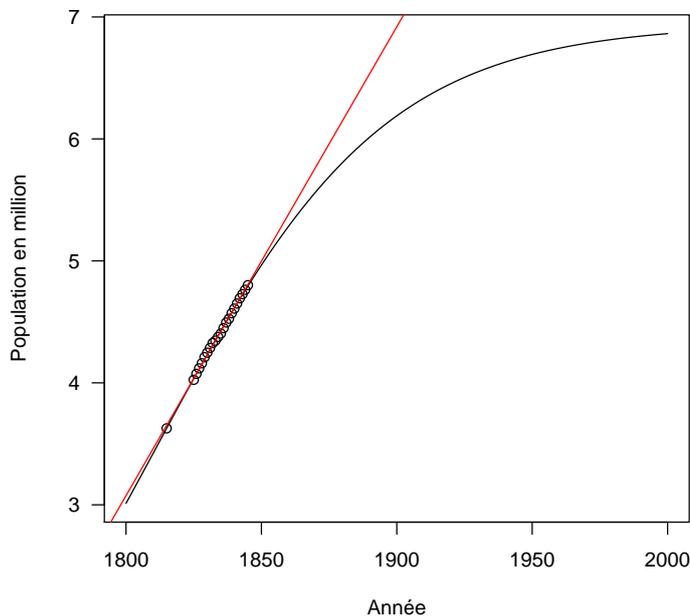
On estime la valeur des paramètres aux moindres carrés ordinaires :

```

t0 <- ver$t[1]
x0 <- ver$obs[1]/10^6
logistique <- function(t, p) {
  xm <- p[1]
  mu <- p[2]
  xm * x0 * exp(mu * (t - t0))/(xm - x0 + x0 * exp(mu * (t - t0)))
}
sce <- function(p) {
  theo <- sapply(ver$t, logistique, p = p)
  return(sum((ver$obs/10^6 - theo)^2))
}
nlmfit <- nlm(f = sce, p = c(5, 0.02))
nlmfit
$minimum
[1] 0.002398739
$estimate
[1] 6.94057538 0.02374399
$gradient
[1] -5.335645e-11 -1.053992e-08
$code
[1] 1
$iterations
[1] 41
tseq <- seq(from = 1800, to = 2000, by = 1)
plot(x = tseq, y = logistique(tseq, p = nlmfit$estimate), type = "l",
     las = 1, xlab = "Année", ylab = "Population en million", main = "Croissance de la population en Belgique")
points(ver$t, ver$obs/10^6)
abline(lm(ver$obs/10^6 ~ ver$t), col = "red")

```

Croissance de la population en Belgique



Il est évident que le modèle logistique ne se distingue pas ici d'un simple modèle linéaire (en rouge) dans la zone des dates observées. La valeur estimée du paramètre x_m n'a donc pas beaucoup de sens ici. La valeur estimée du paramètre $\mu \approx 0.0237$ correspond à un temps de doublement de d'environ 29.2 ans, qui semble raisonnable pour une population humaine.

4 Curiosités

En 1850, le rendement du blé en France était de l'ordre de 10 quintaux à l'hectare, aujourd'hui, la production s'élève à 80, voire 100 quintaux/hectare chez les agriculteurs les plus performants. Le rendement a donc été décuplé depuis le temps où Verhulst [7] écrivait :

Si l'on découvrait un engrais qui portât la fertilité des mauvaises terres au même degré que celle des bonnes d'aujourd'hui ; il n'y a pas de doute que la limite de la population ne fût reculée proportionnellement à l'importance de cette découverte. Mais ce serait là un miracle de la science, un de ces événements dénués de toute probabilité dont il serait injuste d'exiger que la théorie tînt compte.

Les articles de Verhulst sont écrits dans un français parfaitement intelligible pour un lecteur moderne sans effort particulier. Cela n'empêche pas, le contexte ayant beaucoup changé depuis, que certains passages sont particulièrement obscurs, par exemple :

M. Villermé ajoute que le fait du peu de fécondité des habitants de la Normandie l'a toujours beaucoup étonné, et qu'il a profité de toutes ses conversations un peu intimes avec des gens du pays, surtout avec les fermiers et les paysans, pour savoir comment il a lieu. Leurs aveux presque unanimes lui ont appris qu'il provient de ce qu'ils limitent volontairement le nombre de leurs enfants, non point par l'abstinence conjugale que les Pères de l'Église ont autorisée¹, mais par un autre moyen condamné par tous les casuistes, notamment par le père Sanchez dans son traité *De sancto matrimonii sacramento*, lib. IX, p. 224, § 12. Ce genre de limitation est d'ailleurs très répandu en France, parmi les gens aisés. Des fermiers de la Beauce, des environs de Tours, etc., en ont parlé à M. Villermé. " Il faut bien, dit ce savant, que ce soit chose fréquente, car j'ai entendu un imprudent prédicateur y faire allusion en mots assez peu couverts pour les bons entendeurs. L'anathème lancé contre elle du haut de la chaire a dû l'apprendre à plus d'un auditeur, en faisant travailler son esprit pour découvrir le *comment*. "

Comprenez qui pourra.

Références

- [1] B. Delmas. Pierre-François Verhulst et la loi logistique de la population. *Mathématiques & Sciences humaines*, 42 :51–81, 2004.
- [2] A. Quetelet. Notice sur Pierre-François Verhulst, membre de l'Académie. *Annuaire de l'Académie royale de Belgique*, 1850 :1–25, 1850.
- [3] M. Shtickzelle. Pierre-François Verhulst (1804-1849) la première découverte de la fonction logistique. *Population*, 3 :541–556, 1981.

¹La note de bas de page originale est : "Saint Paul aux Corinthiens, ép. 1, chap. VII, v. 5. Lactance dit en parlant des pères qui exposent leurs enfants : *Quare si quis liberos ob pauperiem non poterit educare, satius est ut se ab uxoris congressione contineat, quam sceleratis manibus Dei opera corrumpat*. DE DIVINA INSTITUTIONE, lib. VI, cap. 20."

- [4] P.-F. Verhulst. Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement. *Correspondance mathématique et physique*, 10 :113–121, 1838.
- [5] P.-F. Verhulst. Recherches mathématiques sur la loi d'accroissement de la population. *Nouveaux mémoires de l'académie royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique*, 18 :1–38, 1845. Lu à la séance du 30 novembre 1844.
- [6] P.-F. Verhulst. Note sur la loi d'accroissement de la population. *Bulletins de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Bruxelles*, 13, 1846.
- [7] P.-F. Verhulst. Deuxième mémoire sur la loi d'accroissement de la population. *Mémoires de l'académie royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique*, 20 :1–32, 1847. Lu à la séance de l'Académie royale du 15 mai 1846.