

Fiche TD avec le logiciel  : tdr42

---

## Modèles exponentiels

D. Chessel, A.B. Dufour & J.R. Lobry


---

Estimation des modèles non linéaires. Approche pratique.

### Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Estimation d'un modèle commun</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Estimation d'un modèle par station</b>	<b>4</b>
<b>4</b>	<b>Courbe Gamma</b>	<b>5</b>
	<b>Références</b>	<b>7</b>

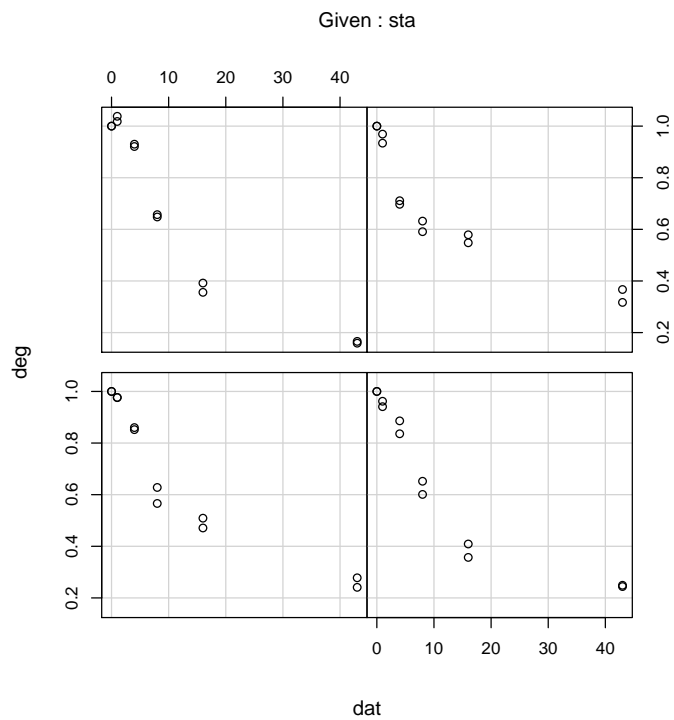
### 1 Introduction

D. Pont (Ecologie des Hydrosystemes Fluviaux, Université Lyon 1) propose trois tableaux expérimentaux donnant le pourcentage de matière dégradée dans les feuilles, les tiges et les racines d'une espèce de Salicornes au cours du temps. Importer les données dans , `sta` est le nom de la station de mesure, `dat` le temps écoulé en semaine et `deg` le taux de dégradation (la méthode d'estimation peut conduire à une valeur plus grande que 1) :

```
sali <- read.table("http://pbil.univ-lyon1.fr/R/donnees/salicor.txt",
  header = TRUE)
head(sali)
```

```
  sta dat  deg
1 PAL   0 1.000
2 PAL   1 1.018
3 PAL   4 0.921
4 PAL   8 0.648
5 PAL  16 0.392
6 PAL  43 0.166
```

```
coplot(formula = deg ~ dat | sta, data = sali, show.given = FALSE)
```

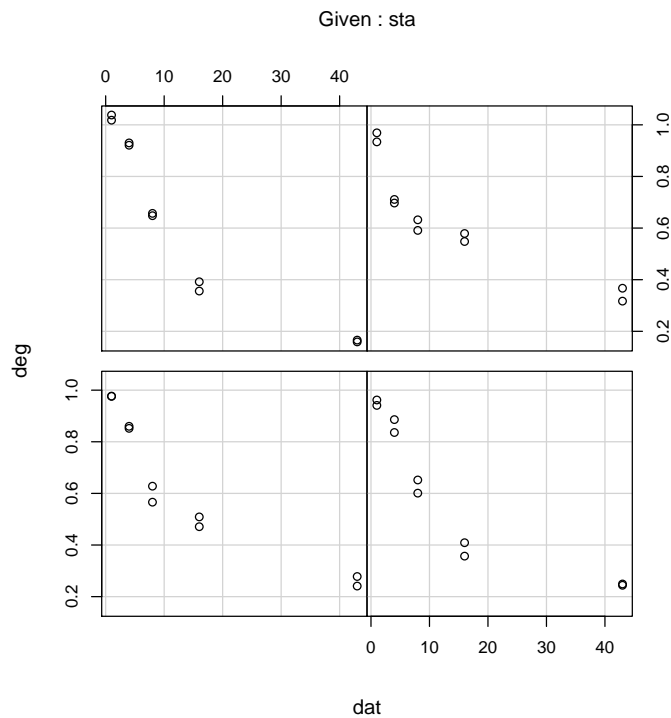


La première valeur des chroniques est conventionnelle :

```
sa <- sali[sali$dat != 0, ]
head(sa)
```

```
  sta dat   deg
2 PAL  1 1.018
3 PAL  4 0.921
4 PAL  8 0.648
5 PAL 16 0.392
6 PAL 43 0.166
8 PAL  1 1.038
```

```
coplot(formula = deg ~ dat | sta, data = sa, show.given = FALSE)
```



On veut estimer un modèle simple qui stipule qu'une proportion  $p$  de la matière est dégradable et que cette fraction se dégrade exponentiellement ( $a < 0$ ), donc un modèle du type :

$$x(t) = pe^{at} + (1 - p)$$

## 2 Estimation d'un modèle commun

Pour faire l'estimation en partant de valeurs pifométriques grossières :

```
formule <- deg ~ p * exp(a * dat) + (1 - p)
nls0 <- nls(formule, data = sa, start = list(a = -0.2, p = 0.2))
class(nls0)
```

```
[1] "nls"
```

```
nls0
```

```
Nonlinear regression model
model: deg ~ p * exp(a * dat) + (1 - p)
data: sa
      a      p
-0.07371 0.78442
residual sum-of-squares: 0.1839
```

```
Number of iterations to convergence: 6
Achieved convergence tolerance: 4.745e-06
```

```
summary(nls0)
```

Formula:  $\text{deg} \sim p * \exp(a * \text{dat}) + (1 - p)$

Parameters:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
a	-0.073709	0.007187	-10.26	1.69e-12 ***
p	0.784417	0.032944	23.81	< 2e-16 ***

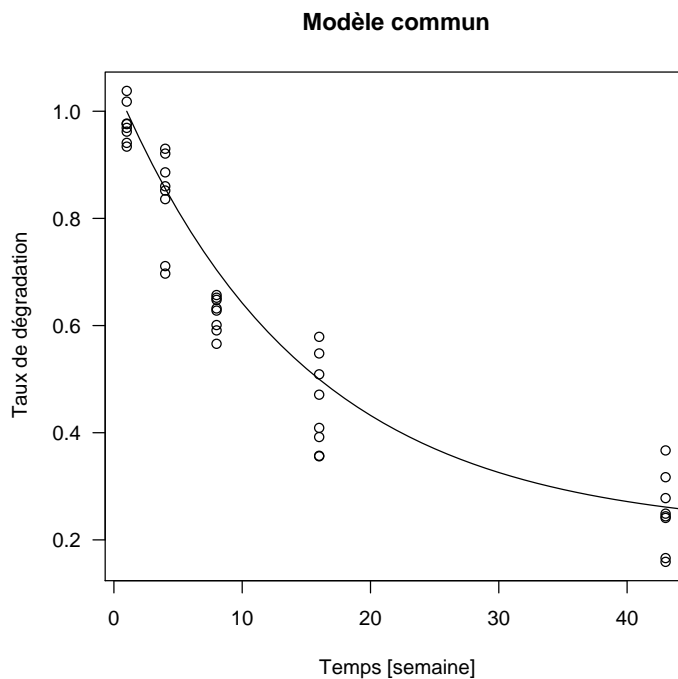
---  
Signif. codes: 0

Residual standard error: 0.06957 on 38 degrees of freedom

Number of iterations to convergence: 6

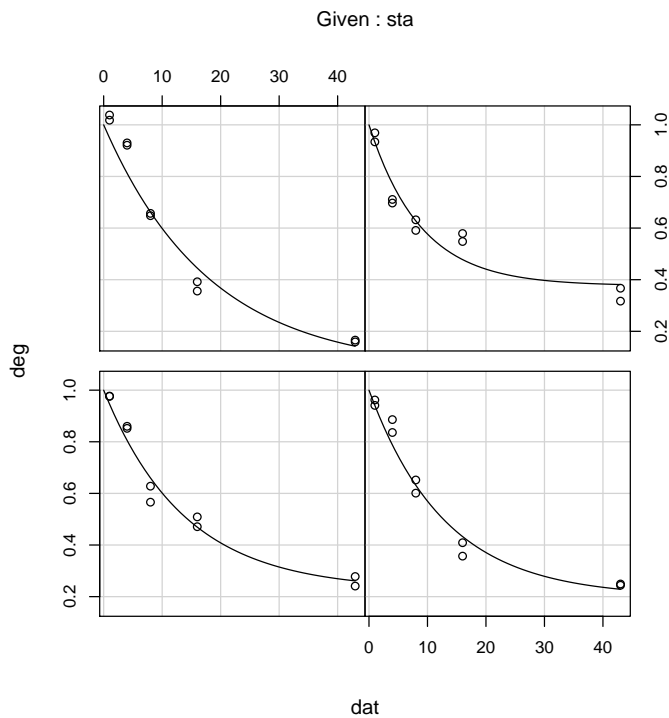
Achieved convergence tolerance: 4.745e-06

```
w0 <- seq(0, 45, le = 50)
plot(x = sa$dat, y = sa$deg, las = 1, main = "Modèle commun", xlab = "Temps [semaine]",
     ylab = "Taux de dégradation")
lines(predict(nls0, new = list(dat = w0)))
```



### 3 Estimation d'un modèle par station

```
fexpo <- function(x, y, col = 1, pch = 1) {
  a <- cbind.data.frame(x, y)
  points(x, y)
  nls0 <- nls(y ~ p * exp(a * x) + (1 - p), data = cbind.data.frame(x,
    y), start = list(a = -0.1, p = 0.1))
  w0 <- seq(0, max(x), le = 50)
  lines(w0, predict(nls0, new = list(x = w0)))
}
coplot(deg ~ dat | sta, data = sa, show = F, panel = fexpo)
```



## 4 Courbe Gamma

L'exercice est proposé page 380 par R. Tomassone *et al.* [1]. Il porte sur une courbe de lactation (47 semaines). Importer les données dans :

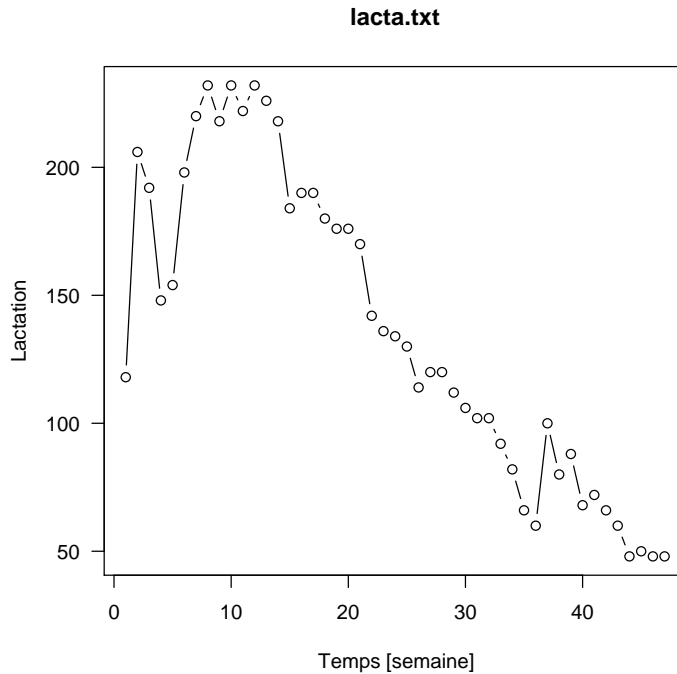
```
lacta <- read.table("http://pbil.univ-lyon1.fr/R/donnees/lacta.txt",
  row.names = 1, header = TRUE)
lacta$t
```

```
[1] 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27
[28] 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47
```

```
lacta$lacta
```

```
[1] 118 206 192 148 154 198 220 232 218 232 222 232 226 218 184 190 190 180 176 176
[21] 170 142 136 134 130 114 120 120 112 106 102 102 92 82 66 60 100 80 88 68
[41] 72 66 60 48 50 48 48
```

```
plot(x = lacta$t, y = lacta$lacta, las = 1, type = "b", xlab = "Temps [semaine]",
  ylab = "Lactation", main = "lacta.txt")
```



On veut ajuster aux données une fonction Gamma :

$$y = ax^d e^{cx}$$

Obtenir une première estimation des paramètres par une régression linéaire :

```
loglacta <- log(lacta$lacta)
lm(loglacta ~ t + log(t), data = lacta)
```

```
Call:
lm(formula = loglacta ~ t + log(t), data = lacta)
```

```
Coefficients:
(Intercept)          t      log(t)
    4.8511      -0.0616     0.4929
```

```
exp(4.851)
```

```
[1] 127.8682
```

```
0.4929/0.0616
```

```
[1] 8.001623
```

Implanter la formule et estimer les paramètres du modèle :

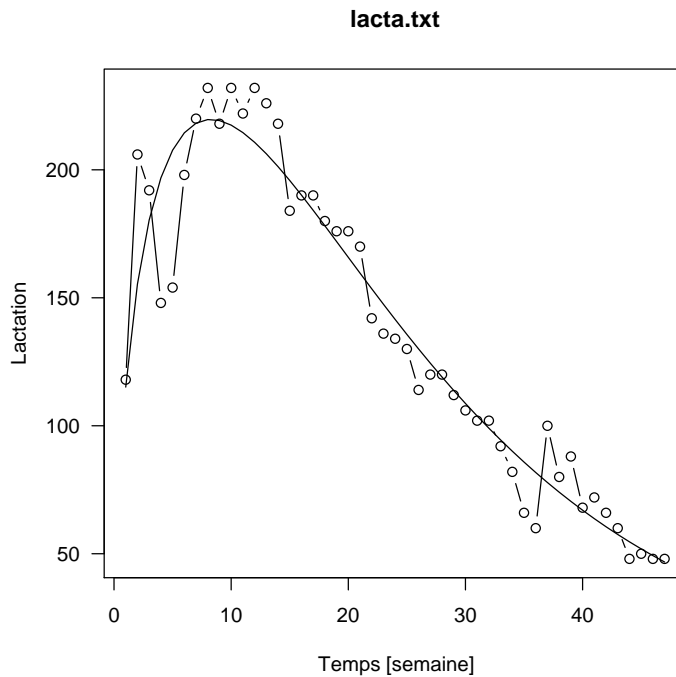
```
lacta.form <- lacta ~ a * t^d * exp(c * t)
nls2 <- nls(lacta.form, lacta, list(a = 127.88, d = 0.4929, c = -0.0616))
nls2
```

```
Nonlinear regression model
model: lacta ~ a * t^d * exp(c * t)
data: lacta
      a      d      c
122.65151 0.52434 -0.06347
residual sum-of-squares: 12772

Number of iterations to convergence: 4
Achieved convergence tolerance: 2.263e-06
```

Tracer le modèle :

```
plot(x = lacta$t, y = lacta$lacta, las = 1, type = "b", xlab = "Temps [semaine]",
     ylab = "Lactation", main = "lacta.txt")
lines(lacta$t, predict(nls2))
```



Exercice : Donner la précision des paramètres fournie par le jackknife.

Exercice : Reprendre la fiche tdr41 et comparer les estimations aux moindres carrés non linéaires du modèle exponentiel et les estimations aux moindres carrés linéaires après la transformation logarithmique.

## Références

- [1] R. Tomassone, C. Dervin, and J.P. Masson. *Biométrie Modélisation de phénomènes biologiques*. Masson, Paris, 1993.