Mathématiques pour les Sciences de la Vie
Analyse – Équations différentielles / Modélisation

Automne 2011

Resp : S. Mousset

Université Claude Bernard Lyon I – France

Table des matières

Plan détaillé

1. Généralités
   - la Modélisation en Biologie
   - Modèles dynamiques à base d'EDO
   - Les équations différentielles ordinaires ou EDO

Les Bio-mathématiques

- Maths : étudier et développer des méthodes pour la prédiction.
- Biolgie : trouver des descriptions et des explications des phénomènes naturels.
- Modélisation : utiliser les mathématiques comme outil pour expliquer et prédire les phénomènes naturels.

Utilité des modèles en biologie

Les modèles sont utiles :

- Tester des hypothèses sans risque (traitement médicamenteux. . .)
- Prédire des performances dans des conditions testables ou non

Les modèles sont limités :

- Modèle mathématique simple $\leftrightarrow$ Modèle non réaliste
- Modèle réaliste $\leftrightarrow$ Paramètres trop nombreux
- Modèle simpliste $\rightsquigarrow$ conclusion irréaliste

Choisir un bon modèle ?

Le principe de parcimonie, ou "Rasoir d'Ockham"

Image: Peter King (Univ. Toronto, Canada)

"Pluralitas non est ponenda sine necessitate"

"Les multiples ne doivent pas être utilisés sans nécessité"

Guillaume d'Ockham (1285-1347)

Plan détaillé

Modèles dynamiques

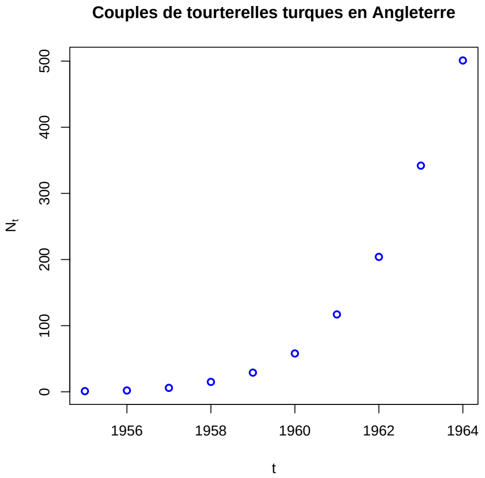
Un exemple : la dynamique de la population tourterelles turques en Angleterre

Année	Nb Lieux
1955	1
1956	2
1957	6
1958	15
1959	29
1960	58
1961	117
1962	204
1963	342
1964	501

Modèles dynamiques

Un exemple : la dynamique de la population tourterelles turques en Angleterre

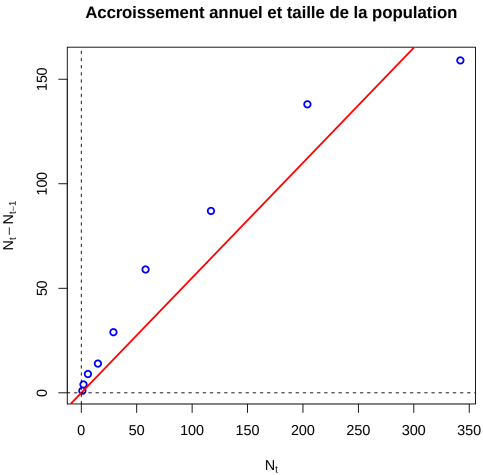
Année	Nb Lieux
1955	1
1956	2
1957	6
1958	15
1959	29
1960	58
1961	117
1962	204
1963	342
1964	501



Modèles dynamiques

Un exemple : la dynamique de la population tourterelles turques en Angleterre

Année	Nb Lieux
1955	1
1956	2
1957	6
1958	15
1959	29
1960	58
1961	117
1962	204
1963	342
1964	501



Un modèle simple

La variation du nombre de lieux d'observation est proportionnelle au nombre de lieux d'observation et au temps écoulé

$$\Delta N = \lambda N \Delta t$$

Hypothèse du modèle

- Les lieux d'observation sont indépendents.
- Chaque lieu engendre en moyenne λ nouveaux lieux d'observation durant l'intervalle de temps Δt

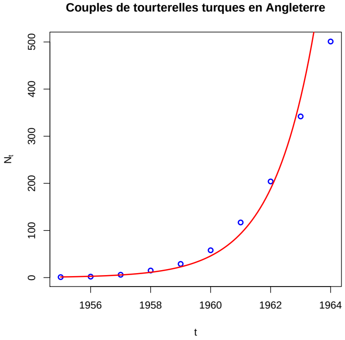
$$\Delta N = \lambda N \Delta t \Leftrightarrow \frac{\Delta N}{\Delta t} = \lambda N$$

Lorsque $\Delta t \to 0$, on obtient

$$\frac{dN}{dt} = \lambda N$$

C'est une *équation différentielle*, dont la solution est

$$N(t) = N_0 e^{\lambda t}$$



Plan détaillé

1. Généralités
   - la Modélisation en Biologie
   - Modèles dynamiques à base d'EDO
   - Les équations différentielles ordinaires ou EDO

- La notion d'équation différentielle apparaît à la fin du XVII^{eme} siècle.
- Découverte du calcul différentiel et intégral par Newton et Leibnitz (1686)
- Premières applications en mécanique ou géométrie
- Au XX^{eme} siècle, nombreuses applications en biologie

Définition

On appelle "équation différentielle" une relation entre les valeurs de la variable x et les valeurs y, y', y'',... $y^{(n)}$ d'une fonction inconnue $y(x)$ et de ses dérivées au point x.

L'inconnue est $y(x)$

Ordre de l'équation différentielle :

$$\begin{aligned} E_n : &\quad F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0 \\ E_1 : &\quad F(x, y, y') = 0 \end{aligned}$$

Vocabulaire

Exemple avec l'équation différentielle d'ordre 1 : $y' = \lambda y$

- Résoudre (intégrer) : trouver la solution de l'équation différentielle. $y' = \lambda y \Rightarrow y = Ke^{\lambda x}$ avec $K \in \mathbb{R}$.
- Conditions initiales : $y(x = 0) = y_0$.
- Solution particulière : la solution qui satisfait les conditions initiales : $y(x) = y_0 e^{\lambda x}$.
- Courbe intégrale : la représentation graphique d'une solution.

Une infinité de solutions

- $y'(x) \to y(x)$: notion de primitive (une fonction continue admet une infinité de primitives)
- Ici, $y' = \lambda y \ \Rightarrow \ y = Ke^{\lambda x}$ avec $K \in \mathbb{R}$.
- Généralement, on s'intéresse à une seule d'entre elles (voir "conditions initiales")

Table des matières

Plan détaillé

2 Méthodes d'intégration
- Équation différentielle d'ordre 1 à variables séparables
- EDO1 homogènes
- EDO1 linéaires

ED1 à variables séparables

Elles sont du type :

$$y' = f(x)g(y) \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

Méthode d'intégration :

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} = f(x)g(y) &\Leftrightarrow \frac{dy}{g(y)} = f(x)dx \\ &\Rightarrow \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx \end{aligned}$$

Solution : $G(y) = F(x) + C$ où G est une primitive de $\frac{1}{g}$, F une primitive de f et $C \in \mathbb{R}$.

Exemple : modèle logistique

Un modèle de croissance pondérale :

$$\frac{dP}{dt} = \lambda P - \mu P^2 = \mu P \left(\frac{\lambda}{\mu} - P \right)$$

$$\frac{dP}{dt} = \mu P \left(\frac{\lambda}{\mu} - P \right) \Leftrightarrow \frac{dP}{P\left(\frac{\lambda}{\mu} - P\right)} = \mu dt$$

$$\Rightarrow \int \frac{dP}{P\left(\frac{\lambda}{\mu} - P\right)} = \mu \int dt$$

On intègre le terme de gauche en décomposant en éléments simples.

Exemple : modèle logistique

$$\frac{1}{P\left(\frac{\lambda}{\mu}-P\right)}=\frac{a}{P}+\frac{b}{\frac{\lambda}{\mu}-P} \Leftrightarrow a\left(\frac{\lambda}{\mu}-P\right)+bP=1$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a\frac{\lambda}{\mu}=1 \\ b-a=0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=\frac{\mu}{\lambda} \\ b=\frac{\mu}{\lambda} \end{array}\right.$$

Soit

$$\int \frac{dP}{P\left(\frac{\lambda}{\mu}-P\right)} = \mu \int dt \Leftrightarrow \frac{\mu}{\lambda}\left(\int \frac{dP}{P} + \int \frac{dP}{\frac{\lambda}{\mu}-P}\right) = \mu \int dt$$

$$\Leftrightarrow \left(\int \frac{dP}{P} + \int \frac{dP}{\frac{\lambda}{\mu}-P}\right) = \lambda \int dt$$

$$\Leftrightarrow \ln P - \ln\left(\frac{\lambda}{\mu}-P\right) = \lambda t + C$$

$$\Leftrightarrow \ln \frac{P}{\frac{\lambda}{\mu}-P} = \lambda t + C$$

$$\Leftrightarrow \frac{P}{\frac{\lambda}{\mu}-P} = Ke^{\lambda t}$$

Soit

$$\begin{aligned}\frac{P}{\frac{\lambda}{\mu}-P}=Ke^{\lambda t} &\Leftrightarrow P=\left(\frac{\lambda}{\mu}-P\right)Ke^{\lambda t}\\ &\Leftrightarrow P\left(1+Ke^{\lambda t}\right)=\frac{\lambda Ke^{\lambda t}}{\mu}\\ &\Leftrightarrow P(t)=\frac{\lambda Ke^{\lambda t}}{\mu\left(1+Ke^{\lambda t}\right)}\\ &\Leftrightarrow P(t)=\frac{\frac{\lambda}{\mu}K}{e^{-\lambda t}+K}\end{aligned}$$

avec $K \in \mathbb{R}$

Au temps $t = 0$, on a $P = P_0$, soit :

$$P_0 = \frac{\frac{\lambda}{\mu}K}{1+K} \Leftrightarrow P_0(1+K) = \frac{\lambda}{\mu}K$$
$$\Leftrightarrow K\left(P_0 - \frac{\lambda}{\mu}\right) + P_0 = 0$$
$$\Leftrightarrow K = \frac{P_0}{\frac{\lambda}{\mu} - P_0}$$

en remplaçant K par sa valeur dans l'expression de P, on obtient :

$$P(t) = \frac{\frac{\lambda}{\mu}K}{e^{-\lambda t} + K} \Rightarrow P(t) = \frac{\frac{\lambda}{\mu}P_0}{P_0 + \left(\frac{\lambda}{\mu} - P_0\right)e^{-\lambda t}}$$

Plan détaillé

2. Méthodes d'intégration
   - Équation différentielle d'ordre 1 à variables séparables
   - EDO1 homogènes
   - EDO1 linéaires

Équations différentielles homogènes d'ordre 1

Il s'agit des équations différentielles du type

$$y' = f\left(\frac{x}{y}\right) \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = f\left(\frac{x}{y}\right)$$

On pose $u = \frac{y}{x} \Leftrightarrow y = ux$, on obtient alors :

$$y = ux \Rightarrow \frac{dy}{dx} = x\frac{du}{dx} + u$$

Or, $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{x}{y}\right) = f(u)$, d'où

$$\begin{aligned} f(u) = x\frac{du}{dx} + u &\Leftrightarrow f(u) - u = x\frac{du}{dx} \\ &\Leftrightarrow \frac{dx}{x} = \frac{du}{f(u) - u} \end{aligned}$$

Équations différentielles homogènes d'ordre 1

Exemple :

$$y' = \frac{y^2 - x^2}{xy} = \frac{x^2\left(\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1\right)}{x^2\left(\frac{y}{x}\right)} = \frac{u^2 - 1}{u}$$

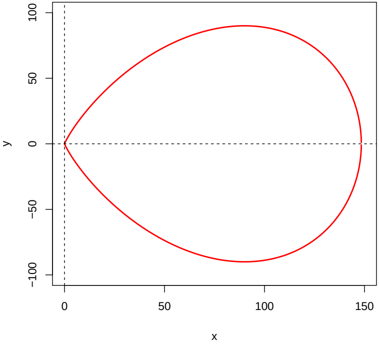
Il s'agit d'une équation homogène du type $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ avec $f(u) = \frac{u^2-1}{u}$. En posant $u = \frac{y}{x}$, on a donc

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{f(u) - u} = \frac{du}{\frac{u^2-1}{u} - u} = \frac{du}{\frac{-1}{u}} = -u\,du$$

Équations différentielles homogènes d'ordre 1

Exemple (suite) : $\frac{dx}{x} = -u\,du$

$$\frac{dx}{x} = -u\,du \Leftrightarrow \int \frac{dx}{x} = \int -u\,du$$
$$\Leftrightarrow -\ln|x| + C = \frac{u^2}{2}$$
$$u = \pm\sqrt{C - 2\ln|x|}$$
$$y = \pm x\sqrt{C - 2\ln|x|}$$



Plan détaillé

2. Méthodes d'intégration
   - Équation différentielle d'ordre 1 à variables séparables
   - EDO1 homogènes
   - EDO1 linéaires

EDO1 linéaires

Une équation différentielle d'ordre 1 linéaire est du type :

$$\underbrace{y'}_{\text{Ordre 1}} + \underbrace{f(x)y}_{\text{linéaire en } y} = \underbrace{g(x)}_{\text{second membre}}$$

où

- $f(x)$ est une fonction quelconque de x
- Si $\forall x,\ g(x) = 0$, alors l'équation est dite "sans second membre" (SSM).

EDO1 linéaires SSM

$$\begin{aligned} y' + f(x)y = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{y} &= -f(x)dx \\ \Rightarrow \int \frac{dy}{y} &= -\int f(x)dx \\ \Rightarrow \ln|y| &= -F(x) + C \\ \Rightarrow y &= Ke^{-F(x)} \end{aligned}$$

où

- K est une constante réelle quelconque,
- F est une primitive de f.

EDO1 linéaire avec second membre $y' + f(x)y = g(x)$

- On cherche d'abord les solutions y_{ssm} de l'équation sans second membre $y' + f(x)y = 0$. Elles sont du type $y_{\text{ssm}}(x) = Ke^{-F(x)}$
- On recherche ensuite les solutions générales de l'équation avec second membre :
  - Recherche d'une solution particulière y_{part}, les solutions générales sont alors du type :

    $$y(x) = y_{\text{ssm}}(x) + y_{\text{part}}(x)$$

  - *ou* méthode de la variation de la constante, on cherche les solutions du type

    $$y(x) = K(x)e^{-F(x)}$$

    où $K(x)$ est une fonction de x.

Exemple : $y' - \frac{y}{x} = x^2$

Recherche des solutions de l'équation sans second membre :
$y' - \frac{y}{x} = 0$
On a une équation du type $y' + f(x)y = 0$ avec $f(x) = -\frac{1}{x}$. Les solutions sont du type

$$y_{\text{ssm}}(x) = Ke^{\ln|x|} = Kx$$

Exemple : $y' - \frac{y}{x} = x^2$

Recherche d'une solution particulière.

On cherche une solution du type $y(x) = \alpha x^3$, soit $y'(x) = 3\alpha x^2$.

On a alors

$$y' - \frac{y}{x} = x^2 \Leftrightarrow 3\alpha x^2 - \frac{\alpha x^3}{x} = x^2$$
$$\Leftrightarrow 2\alpha x^2 = x^2$$
$$\Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{2}$$

Une solution particulière est donc $y_{\text{part}}(x) = \frac{x^3}{2}$

Les solutions générales sont donc de la forme

$$y(x) = y_{\text{part}}(x) + y_{\text{ssm}}(x) = \frac{x^3}{2} + Kx$$

Exemple : $y' - \frac{y}{x} = x^2$

Méthode de Laplace ("variation de la constante").

Les solutions sont du type $y(x) = K(x)x$, soit $y'(x) = K(x) + xK'(x)$ et vérifient $y' - \frac{y}{x} = x^2$, soit

$$\begin{aligned}
y' - \frac{y}{x} = x^2 &\Leftrightarrow K(x) + xK'(x) - \frac{xK(x)}{x} = x^2 \\
&\Leftrightarrow xK'(x) = x^2 \\
&\Leftrightarrow K'(x) = x \\
&\Rightarrow K(x) = \int x dx \\
&\Rightarrow K(x) = \frac{1}{2}x^2 + C
\end{aligned}$$

Les solutions générales sont donc de la forme

$$y(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 + C\right)x = \frac{x^3}{2} + Cx$$

Remarques

- Recherche de solution particulière
  - Parfois difficile
  - Requiert de l'entraînement
  - Rapide
- Méthode de Laplace
  - Relativement simple
  - Parfois très longue...

Une fois la solution générale trouvée, dérivez la pour vérifier qu'elle est solution de l'équation de départ !

Table des matières

Exercice d'annale : juin 2008

Analyse : Transport de poissons vivants

H. pulchripinnis

Les aquariophiles ont l'habitude de transporter les poissons vivants dans des sacs en plastique fermés contenant de l'eau et un mélange gazeux (habituellement de l'air). Dans de telles conditions, la concentration y en oxygène dissous (en $\mathrm{mg} \cdot \mathrm{L}^{-1}$) vérifie l'équation différentielle

$$y' + y = a - bt \qquad (1)$$

où a et b sont des constantes réelles strictement positives et t est le temps de transport exprimé en heures.

1. Résolvez l'équation (1) sans second membre.
2. Une solution particulière de l'équation 1 est de la forme $y_{\mathrm{P}}(t) = r + st$, où r et s sont des réels. Donnez une expression de r et s en fonction de a et b.
3. Donnez l'expression générale des solutions de l'équation (1).