

Mathématiques pour les Sciences de la Vie

Analyse – Primitives / Intégration

Automne 2011

Resp : S. Mousset

Université Claude Bernard Lyon I – France

Table des matières

- 1 Généralités
- 2 Propriétés
- 3 Méthodes de calcul

Plan détaillé

- 1 Généralités
 - Notion de primitive
 - Exemples de primitives connues
 - Interprétation géométrique

Notion de Primitive

Soit F une fonction dérivable telle que $F' = f$.

$$\begin{array}{ccc}
 & \xrightarrow{\text{Dérivée}} & \\
 F & & f \\
 & \xleftarrow{\text{Intégrer}} &
 \end{array}$$

- F est une primitive de $f \Leftrightarrow F' = f$
- Si F est une primitive de f , alors $F + K$ l'est aussi.
- L'ensemble des primitives de f est noté

$$\int f(x) dx$$

Plan détaillé

- 1 Généralités
 - Notion de primitive
 - Exemples de primitives connues
 - Interprétation géométrique

Exemples de primitives

Voir formulaire <http://mathsv.univ-lyon1.fr>

Dérivée	Primitive
x^α , où $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\frac{1}{x}$	$\ln x $
$\ln x$	$x \ln x - x$
e^x	e^x
$\cos x$	$\sin x$
$\sin x$	$-\cos x$

Exemples de primitives

Voir formulaire <http://mathsv.univ-lyon1.fr>

Dérivée	Primitive
$\frac{1}{x^2 + 1}$	$\arctan x$
$\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$	$\arcsin x$
$\frac{1}{\sin x}$	$\ln \left \tan \frac{x}{2} \right $

Exemples de primitives

Voir formulaire <http://mathsv.univ-lyon1.fr>

Dérivée	Primitive
$\frac{u'}{u^m}$, où $m \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$	$\frac{-1}{(m-1)u^{m-1}}$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$
$\frac{u'}{u}$	$\ln u $
$u' \cos(u)$	$\sin(u)$
$u' \sin(u)$	$-\cos(u)$

Plan détaillé

- 1 Généralités
 - Notion de primitive
 - Exemples de primitives connues
 - Interprétation géométrique

Interprétation géométrique

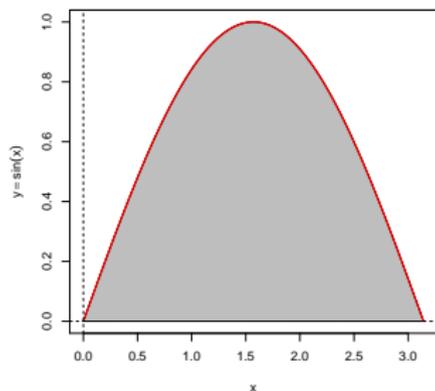
Calculer l'aire A délimitée par la courbe d'une fonction continue f ayant pour primitive F entre $x = a$ et $x = b$.

- On découpe l'aire en n intervalles de taille constante $\Delta x = \frac{a-b}{n}$
- On peut écrire

$$\sum_{k=1}^n \Delta x f_{m,k} \leq A \leq \sum_{k=1}^n \Delta x f_{M,k}$$

- Lorsque $n \rightarrow \infty$, ces sommes convergent vers

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$



Interprétation géométrique

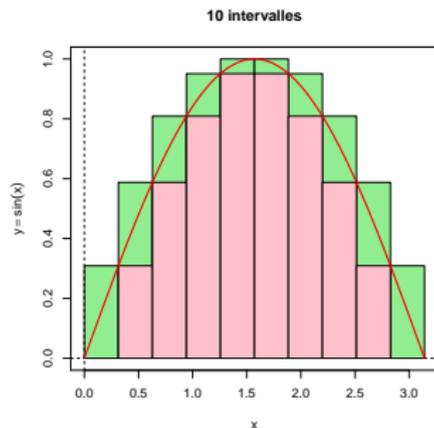
Calculer l'aire A délimitée par la courbe d'une fonction continue f ayant pour primitive F entre $x = a$ et $x = b$.

- On découpe l'aire en n intervalles de taille constante $\Delta x = \frac{a-b}{n}$
- On peut écrire

$$\sum_{k=1}^n \Delta x f_{m,k} \leq A \leq \sum_{k=1}^n \Delta x f_{M,k}$$

- Lorsque $n \rightarrow \infty$, ces sommes convergent vers

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$



Interprétation géométrique

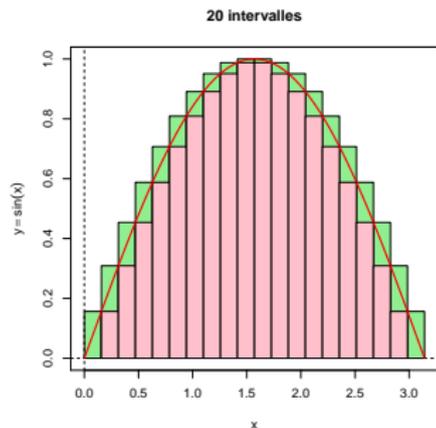
Calculer l'aire A délimitée par la courbe d'une fonction continue f ayant pour primitive F entre $x = a$ et $x = b$.

- On découpe l'aire en n intervalles de taille constante $\Delta x = \frac{a-b}{n}$
- On peut écrire

$$\sum_{k=1}^n \Delta x f_{m,k} \leq A \leq \sum_{k=1}^n \Delta x f_{M,k}$$

- Lorsque $n \rightarrow \infty$, ces sommes convergent vers

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$



Interprétation géométrique

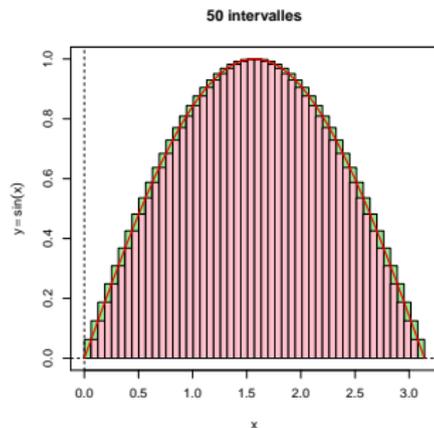
Calculer l'aire A délimitée par la courbe d'une fonction continue f ayant pour primitive F entre $x = a$ et $x = b$.

- On découpe l'aire en n intervalles de taille constante $\Delta x = \frac{a-b}{n}$
- On peut écrire

$$\sum_{k=1}^n \Delta x f_{m,k} \leq A \leq \sum_{k=1}^n \Delta x f_{M,k}$$

- Lorsque $n \rightarrow \infty$, ces sommes convergent vers

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$



Valeur moyenne

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$.

La valeur moyenne de f sur $[a, b]$
est

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

Exemple : $C(t) = C_0 e^{-\lambda t}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} C_0 e^{-\lambda t} dt &= \frac{C_0}{\tau} \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} \right]_0^{\tau} \\ &= \frac{C_0}{\lambda \tau} \left(1 - e^{-\lambda \tau} \right) \end{aligned}$$

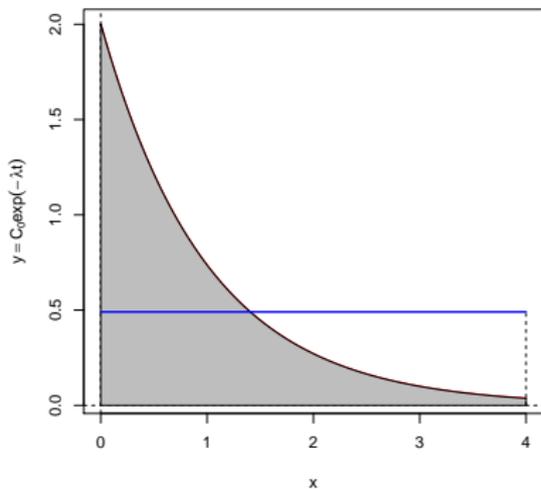


Table des matières

1 Généralités

2 Propriétés

3 Méthodes de calcul

Plan détaillé

- 2 Propriétés
 - Relation de Chasles
 - Inégalités et intégration
 - Parité et intégration

Relation de Chasles

Soit f une fonction continue sur I

$$\forall (a, b, c) \in I^3, \int_a^c f(t) dt = \int_a^b f(t) dt + \int_b^c f(t) dt$$

Conséquences :

- $\int_a^a f(t) dt = 0$
- $\int_a^b f(t) dt = - \int_b^a f(t) dt$

Plan détaillé

- 2 Propriétés
 - Relation de Chasles
 - Inégalités et intégration
 - Parité et intégration

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$ (avec $a < b$)

- Si $\forall x \in [a, b], f(x) \geq 0$ alors $\int_a^b f(x) dx \geq 0$
- Si $\forall x \in [a, b], f(x) \leq g(x)$ alors $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$

Plan détaillé

- 2 Propriétés
 - Relation de Chasles
 - Inégalités et intégration
 - Parité et intégration

Intégrales de fonctions paires/impaires

- Si f est paire, alors $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$
- Si f est impaire, alors $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$

Table des matières

- 1 Généralités
- 2 Propriétés
- 3 Méthodes de calcul**

Plan détaillé

- 3 Méthodes de calcul
 - Décomposition en somme
 - Changement de variable
 - Décomposition en éléments simples
 - Intégration par parties

Décomposition en somme

Principe

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int f(x) dx + \beta \int g(x) dx$$

Plan détaillé

- 3 Méthodes de calcul
 - Décomposition en somme
 - **Changement de variable**
 - Décomposition en éléments simples
 - Intégration par parties

Changement de variable

Principe

On pose $x = \Phi(t)$ d'où $dx = \Phi'(t)dt$

$$\int_{\Phi(a)}^{\Phi(b)} f(x) dx = \alpha \int_a^b (f \circ \Phi)(t) \Phi'(t) dt$$

Changement de variable

Exemple

On veut calculer $\int_a^b \frac{\sqrt{x-1}}{x} dx$

On pose $t = \sqrt{x-1} \Leftrightarrow x = t^2 + 1$

- $x = a \Leftrightarrow t = \sqrt{a-1}$
- $x = b \Leftrightarrow t = \sqrt{b-1}$
- $x = t^2 + 1 \Rightarrow dx = 2t dt$

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{\sqrt{x-1}}{x} dx &= \int_{\sqrt{a-1}}^{\sqrt{b-1}} \frac{t}{t^2+1} 2t dt = \int_{\sqrt{a-1}}^{\sqrt{b-1}} \frac{2t^2}{t^2+1} dt \\ &= \int_{\sqrt{a-1}}^{\sqrt{b-1}} \left(2 - \frac{2}{t^2+1} \right) dt = 2 [t - \arctan t]_{\sqrt{a-1}}^{\sqrt{b-1}} \\ &= 2 [\sqrt{x-1} - \arctan \sqrt{x-1}]_a^b \end{aligned}$$

Plan détaillé

- 3 Méthodes de calcul
 - Décomposition en somme
 - Changement de variable
 - Décomposition en éléments simples
 - Intégration par parties

Fractions rationnelles

Une fraction rationnelle est une fonction qui est le rapport de deux fonctions polynomes.

$$\int f(x) dx = \int \frac{A(x)}{B(x)} dx$$

où $A(x)$ et $B(x)$ sont deux polynomes. Principe : Réduire f en “éléments simples” pour obtenir :

$$f(x) = Q(x) + \frac{R(x)}{B(x)}$$

On cherche ensuite les λ_i tels que

$$\frac{R(x)}{B(x)} = \sum_i \frac{\lambda_i}{x - r_i}$$

où les r_i sont les racines du polynôme $B(x)$

Exemple

On veut calculer $\int \frac{1}{x(x-1)} dx$

$$\frac{1}{x(x-1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} = \frac{a(x-1) + bx}{x(x-1)} = \frac{(a+b)x - a}{x(x-1)}$$

Par identification, on obtient $-a = 1$ et $a + b = 0$, soit $a = -1$ et $b = 1$.

$$\int \frac{1}{x(x-1)} dx = \int \left(\frac{-1}{x} + \frac{1}{x-1} \right) dx$$

Plan détaillé

- 3 Méthodes de calcul
 - Décomposition en somme
 - Changement de variable
 - Décomposition en éléments simples
 - Intégration par parties

Intégration par parties

Principe

Dérivée d'un produit de fonctions uv .

$$(uv)' = u'v + uv' \Leftrightarrow u'v = (uv)' - uv'$$

En intégrant de part et d'autre de l'égalité :

$$\int (u'v)(x) dx = \int ((uv)'(x) - (uv')(x)) dx$$

Soit

$$\int (u'v)(x) dx = uv(x) - \int (uv')(x) dx$$

Intégration par parties

Exemple

Que vaut $\int \ln x \, dx$?

On pose :

- $u'(x) = 1 \Leftrightarrow u(x) = x$
- $v(x) = \ln x \Rightarrow v'(x) = \frac{1}{x}$

La formule de l'intégration par partie donne :

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - \int x \frac{1}{x} \, dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + K$$

Intégration par parties

Quand l'utiliser ?

- Produits de fonctions
- Simplifier des produits de fonctions à intégrer (éventuellement, plusieurs IPP)
 - $\int P(x)e^x dx$ où P est un polynôme.
 - $\int P(x)\sin x dx$ ou $\int P(x)\cos x dx$ où $P(x)$ est un polynôme.
- Faire apparaître une propriété simple : $\int e^x \sin x dx$ (2IPP nécessaires)

Exemple d'IPP successives

calcul de $\int e^x \sin x dx$

Première intégration par parties : $\int e^x \sin x dx = \int (u_1' v_1)(x) dx$

- $u_1'(x) = e^x \Leftarrow u_1(x) = e^x$
- $v_1(x) = \sin x \Rightarrow v_1'(x) = \cos x$

IPP1 : $\int (u_1' v_1)(x) dx = [(u_1 v_1)(x)] - \int (u_1 v_1')(x) dx$

$$\int e^x \sin x dx = [e^x \sin x] - \int e^x \cos x dx$$

Exemple d'IPP successives

calcul de $\int e^x \sin x \, dx = [e^x \sin x] - \int e^x \cos x \, dx$

Deuxième intégration par parties : $\int e^x \cos x \, dx = \int (u_2' v_2)(x) \, dx$

- $u_2'(x) = e^x \Leftarrow u_2(x) = e^x$
- $v_2(x) = \cos x \Rightarrow v_2'(x) = -\sin x$

IPP2 : $\int (u_2' v_2)(x) \, dx = [(u_2 v_2)(x)] - \int (u_2 v_2')(x) \, dx$

$$\int e^x \sin x \, dx = [e^x \sin x] - \left([e^x \cos x] - \int -e^x \sin x \, dx \right)$$

Soit :

$$\int e^x \sin x \, dx = \frac{e^x (\sin x - \cos x)}{2} + K$$