Mathématiques pour les Sciences de la Vie
Analyse – Étude de fonctions

Automne 2011

Resp : S. Mousset

Université Claude Bernard Lyon I – France

Table des matières

Vos enseignants de CM

Sylvain Mousset
Analyse (Seq 2)

Marc Bailly-Bechet
Probas & Stat (Seq 2)

Dominique Allainé
Seq 3

Organisation du Cours

1. Étude de fonctions.
2. Intégration
3. Équations différentielles

Méthode d'étude d'une fonction

1. Domaine de définition.
2. Parité / Périodicité
3. Étude des variations sur un intervalle approprié
   - Dérivation
   - Étude des limites aux bornes de l'intervalle
   - Tableau de variation (avec limites et extrema).
4. Points d'inflexion (éventuellement).
5. Asymptotes obliques (éventuellement).
6. Représentation graphique

Table des matières

Plan détaillé

2 Généralités
- Définitions
- Opérations sur les fonctions
- Parité, périodicité
- Variations d'une fonction

Intervalle

a et b deux réels distincts, $a < b$.

- Intervalle ouvert : $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x < b\}$
- Intervalle fermé : $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leqslant x \leqslant b\}$
- Intervalles semi-ouverts (ou semi-fermés) :
  $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leqslant x < b\}$
  $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x \leqslant b\}$
- Par extension avec $\pm\infty$:
  $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leqslant x\}$
  $]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \leqslant a\}$

Voisinage d'un réel a

Définition : $a \in \mathbb{R}$, on appelle “voisinage de a” un intervalle ouvert contenant a.

Exemple : $\forall a \in \mathbb{R}$, $\forall \varepsilon > 0$, l'intervalle $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$ est un voisinage de a.

Fonction réelle d'une variable réelle

Définition : Une fonction réelle f d'une variable réelle est une transformation qui à tout élément x d'une partie (domaine) $D \subset \mathbb{R}$ fait correspondre un *unique* élément de $\mathbb{R}$

Notation :

$$\begin{array}{rl} f: & D \rightarrow \mathbb{R} \\ & x \mapsto f(x) \end{array}$$

D est le "domaine de définition de f".

Domaine de définition

Définition : Le domaine de définition D_f d'une fonction f est l'ensemble des réels x pour lesquels il existe une image de x par la fonction f.

$D_f = \{x \in \mathbb{R} \,|\, \exists! y \in R, y = f(x)\}$

Exemple :

$$f \,:\, x \mapsto \sqrt{\frac{1}{x-1}}$$

$$\begin{aligned} D_f &= \{x \in \mathbb{R} \,|\, x - 1 > 0\} \\ &=]1, +\infty[\end{aligned}$$

Image du domaine de définition

Définition : L'image du domaine de définition D_f par une fonction f, notée $f(D_f)$ est l'ensemble des réels y pour lesquels il existe au moins un antécédent de x par la fonction f.

$f(D_f) = \{y \in \mathbb{R} \,|\, \exists x \in D_f, y = f(x)\}$

Exemple :

$$f : x \mapsto \sqrt{\frac{1}{x-1}}$$

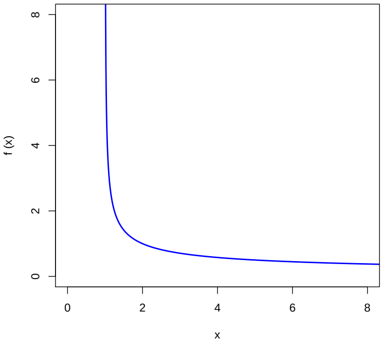
$$D_f =]1, +\infty[$$

$$f(D_f) =]0, +\infty[$$

Graphe d'une fonction

Le graphe d'une fonction f dans un repère cartésien (Ox, Oy) est l'ensemble des points de coordonnées $(x, f(x))$ avec $x \in D_f$.

$$f : x \mapsto \sqrt{\frac{1}{x-1}}$$



Plan détaillé

2. Généralités
   - Définitions
   - Opérations sur les fonctions
   - Parité, périodicité
   - Variations d'une fonction

Opérations

f et g deux fonctions réelles définies sur D_g et D_f.

- Produit : $(fg)(x) = f(x)g(x)$
  $D_{fg} = D_f \cap D_g$
- Somme : $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
  $D_{f+g} = D_f \cap D_g$
- Inverse : $\left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{1}{f(x)}$
  $D_{\frac{1}{f}} = \{x \in D_f \,|\, f(x) \neq 0\}$
- Composition : $(f \circ g)(x) = f(g(x))$
  $D_{f \circ g} = \{x \in D_g \,|\, g(x) \in D_f\}$

Opérations

f et g deux fonctions réelles définies sur D_g et D_f.

- Quotient : $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$
  $D_{\frac{f}{g}} = \{x \in (D_f \cap D_g) \mid g(x) \neq 0\}$
- Multiplication par un réel : $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $(\alpha f)(x) = \alpha \times f(x)$
  $D_{\alpha f} = D_f$
- $(-f)(x) = -f(x)$
  $D_{-f} = D_f$

Fonction réciproque

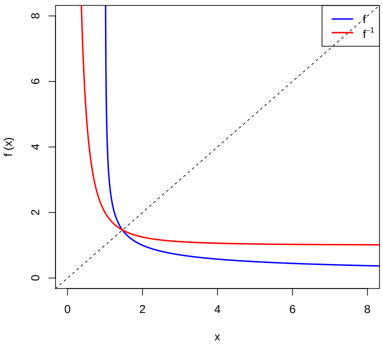
f une fonction réelle définie sur I telle que $f(I) = J$

- f admet une fonction réciproque s'il existe une fonction $g : J \to I$ telle que $f \circ g = Id_I$ et $g \circ f = Id_J$.
- g est notée f^{-1}

Exemple :

$$f : x \mapsto \sqrt{\frac{1}{x-1}}$$

$$f^{-1} : y \mapsto 1 + \frac{1}{y^2}$$



Plan détaillé

2 Généralités
- Définitions
- Opérations sur les fonctions
- Parité, périodicité
- Variations d'une fonction

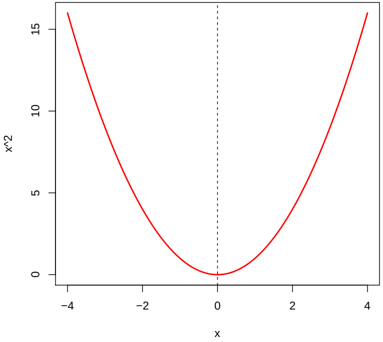
Parité : fonction paire

Soit $f\,:\,D_f \to \mathbb{R}$ une fonction réelle d'une variable réelle.

f est *paire* si et seulement si

- $\forall x \in D_f,\, (-x) \in D_f$
- $\forall x \in D_f,\, f(-x) = f(x)$

Exemple : $f(x) = x^2$



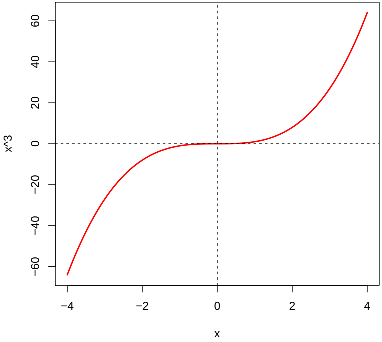
Parité : fonction impaire

Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ une fonction réelle d'une variable réelle.

f est *impaire* si et seulement si

- $\forall x \in D_f,\ (-x) \in D_f$
- $\forall x \in D_f,\ f(-x) = -f(x)$

Exemple : $f(x) = x^3$



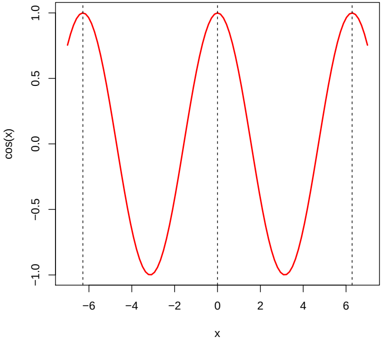
Périodicité

Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ une fonction réelle d'une variable réelle.

f est *périodique de période* p si et seulement si

- $\forall x \in D_f$, $(x+p) \in D_f$
- $\forall x \in D_f$, $f(x+p) = f(x)$

Exemple : $f(x) = \cos x$ est paire et périodique de période 2π



Plan détaillé

2 Généralités
- Définitions
- Opérations sur les fonctions
- Parité, périodicité
- Variations d'une fonction

Fonction croissante

Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ une fonction réelle d'une variable réelle.

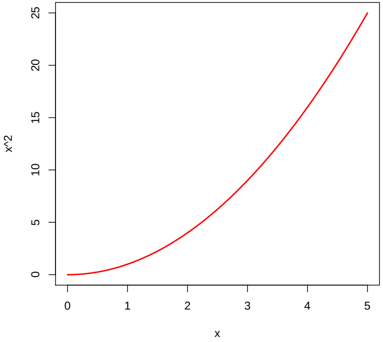
f est *croissante sur* $I \subset D_f$ si et seulement si

- $\forall (a,b) \in I^2, a < b \Rightarrow f(a) \leqslant f(b)$.

f est *strictement croissante sur* $I \subset D_f$ si et seulement si

- $\forall (a,b) \in I^2, a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$.

Exemple : $f(x) = x^2$ est strictement croissante sur $[0,5[$.



fonction décroissante

Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ une fonction réelle d'une variable réelle.

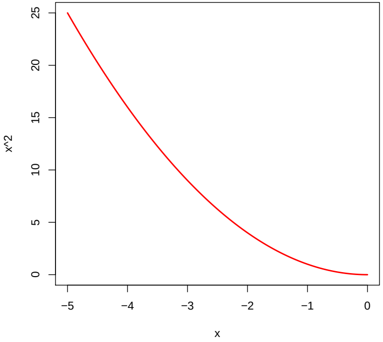
f est *décroissante sur* $I \subset D_f$ si et seulement si

- $\forall (a,b) \in I^2, a < b \Rightarrow f(a) \geqslant f(b)$.

f est *strictement décroissante sur* $I \subset D_f$ si et seulement si

- $\forall (a,b) \in I^2, a < b \Rightarrow f(a) > f(b)$.

Exemple : $f(x) = x^2$ est strictement croissante sur $[-5, 0[$.



Taux d'accroissement

Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ une fonction réelle d'une variable réelle. Soit $(a, b) \in D_f^2, a < b$.

Le taux d'accroissement de f entre a et b est

$$\frac{\Delta_y}{\Delta_x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Exemple : Le taux d'accroissement de $f(x) = x^2$ est 3 entre 1 et 2.

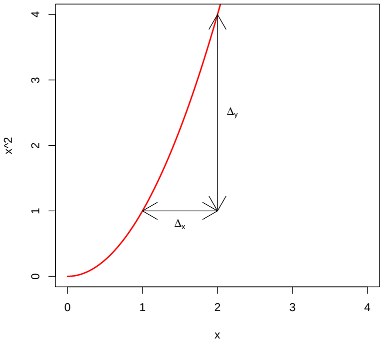


Table des matières

Plan détaillé

3 Limites
- Limites finies l
- Limites infinies
- Opérations sur les limites et formes indéterminées
- Limites connues
- Limites par comparaison

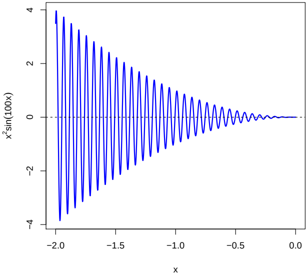
Limite finie en a^- (en a^+)

Soit f une fonction définie sur un domaine $D_f \subset \mathbb{R}$, et $a \in \mathbb{R}$. f admet une limite finie $l \in \mathbb{R}$ à gauche en a si et seulement si

- $a \in D_f$ ou a est une borne de D_f.
- Lorsque $x \to a^-$, $f(x) \to l$

Mathématiquement, ces conditions s'écrivent
$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,$
$(x \in]a-\delta, a[\Rightarrow f(x) \in [l-\varepsilon, l+\varepsilon])$
On note alors

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = l$$



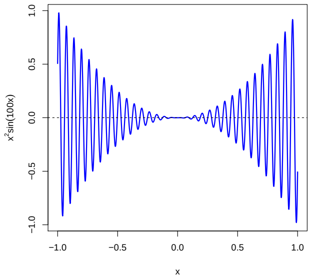
Limite finie en a

Soit f une fonction définie sur un domaine $D_f \subset \mathbb{R}$, et $a \in \mathbb{R}$.
f admet une limite finie $l \in \mathbb{R}$ en a si et seulement si

- Si $a \in D_f$,
  $\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) = l.$
- Si $a \notin D_f$,
  $\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = l.$
  On peut prolonger f par continuité en écrivant $f(a) = l$.

On note alors

$$\lim_{x \to a} f(x) = l$$



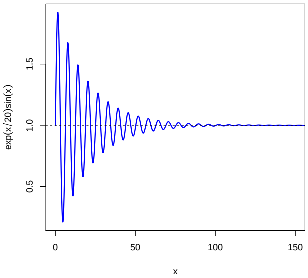
Limite finie en $+\infty$ (ou $-\infty$)

Soit f une fonction définie sur un domaine $D_f \subset \mathbb{R}$.
f admet une limite finie $l \in \mathbb{R}$ en $+\infty$ si et seulement si

- Lorsque $x \to +\infty$, $f(x) \to l$

Mathématiquement, ceci s'écrit
$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha \in \mathbb{R},$
$(x \in]\alpha, +\infty[\Rightarrow f(x) \in [l - \varepsilon, l + \varepsilon])$
On note alors

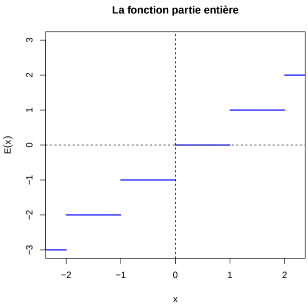
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$$



Continuité

Soit f une fonction définie sur un domaine $D_f \subset \mathbb{R}$.

- f est continue en $a \in D_f$ si et seulement si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$
- f est continue sur $I \subset D_f$ si et seulement si $\forall a \in I,\ \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.



Exemple : $x \mapsto E(x)$ est continue sur les intervalle $[n, n+1[$, $n \in \mathbb{Z}$, mais discontinue pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Propriétés des fonctions continues

En général, prouver la continuité d'une fonction quelconque est complexe. La plupart du temps, on utilise les propriétés sur la continuité de fonctions usuelles continues.

- Somme de fonctions continues. Exemple $x \mapsto \frac{1}{x} + x^2$
- Produit de fonctions continues. Exemple $x \mapsto \frac{1}{x} e^x$
- Quotient de fonctions continues. Exemple $x \mapsto \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$
- Composition de fonctions continues. Exemple $x \mapsto e^{\cos(x)}$

Plan détaillé

3. Limites
   - Limites finies l
   - Limites infinies
   - Opérations sur les limites et formes indéterminées
   - Limites connues
   - Limites par comparaison

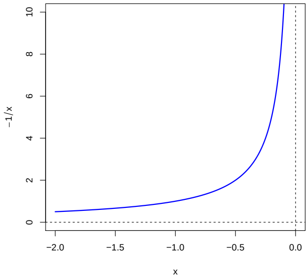
Limite infinie en a^- (en a^+)

Soit f une fonction définie sur un domaine $D_f \subset \mathbb{R}$, et $a \in \mathbb{R}$.
f admet pour limite $+\infty$ à gauche en a si et seulement si

- Lorsque $x \to a^-$, $f(x) \to +\infty$

Mathématiquement, cette condition s'écrit
$\forall y > 0,\ \exists \delta > 0,$
$(x \in]a-\delta, a[\Rightarrow f(x) \in [y, +\infty[)$
On note alors

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty$$



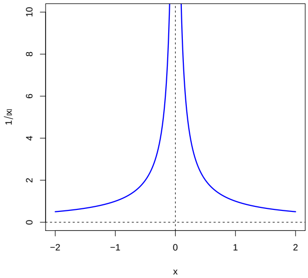
Limite infinie en a

Soit f une fonction définie sur un domaine $D_f \subset \mathbb{R}$, et $a \in \mathbb{R}$.
f admet pour limite $+\infty$ en a si et seulement si

- $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$

On note alors

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$



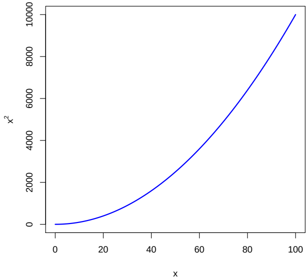
Limite infinie en $+\infty$ (ou $-\infty$)

Soit f une fonction définie sur un domaine $D_f \subset \mathbb{R}$
f admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si et seulement si

- $f(x) \to +\infty$ lorsque $x \to +\infty$

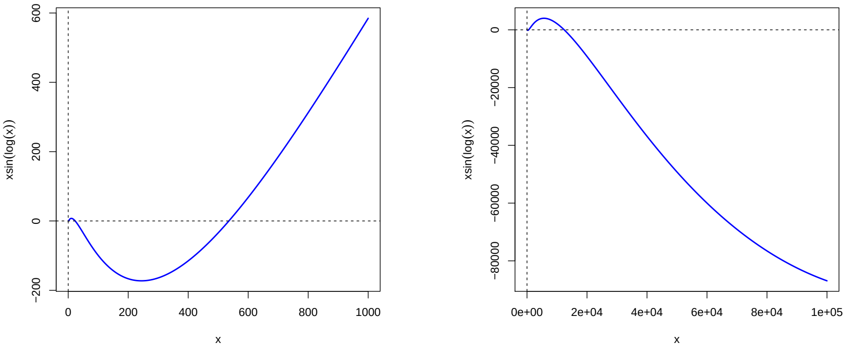
Mathématiquement, cette condition s'écrit
$\forall y > 0,\ \exists x_0 \in \mathbb{R},$
$(x \in [x_0, +\infty[\Rightarrow f(x) \in [y, +\infty[)$
On note alors

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$



Méfiez-vous de vos calculatrices

Exemple : La fonction $x \mapsto x\sin(\ln(x))$ n'admet pas de limite en $+\infty$.



Plan détaillé

3 Limites
- Limites finies l
- Limites infinies
- Opérations sur les limites et formes indéterminées
- Limites connues
- Limites par comparaison

Opérations sur les limites et formes indéterminées

$\lim_{x\to a} f(x)$	$\lim_{x\to a} g(x)$	$\lim_{x\to a} (f+g)(x)$	$\lim_{x\to a} (fg)(x)$	$\lim_{x\to a} \frac{f}{g}(x)$	$\lim_{x\to a} g\circ f(x)$
$\lambda \neq 0$	$\mu \neq 0$	$\lambda + \mu$	$\lambda\mu$	$\frac{\lambda}{\mu}$	$\lim_{x\to\lambda} g(x)$
$\lambda \neq 0$	0	λ	0	F.I. $\frac{\lambda}{0}$	$\lim_{x\to\lambda} g(x)$
$\lambda \neq 0$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	0	$\lim_{x\to\lambda} g(x)$
0	$\mu \neq 0$	μ	0	0	$\lim_{x\to 0} g(x)$
0	0	0	0	F.I. $\frac{0}{0}$	$\lim_{x\to 0} g(x)$
0	$\pm\infty$	$\pm\infty$	F.I. $0\times\infty$	0	$\lim_{x\to 0} g(x)$
$\pm\infty$	$\mu \neq 0$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\lim_{x\to\pm\infty} g(x)$
$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	F.I $0\times\infty$	F.I. $\frac{\pm\infty}{0}$	$\lim_{x\to\pm\infty} g(x)$
$\pm\infty$	$\pm\infty$	F.I. $\infty - \infty$	$\pm\infty$	F.I. $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$	$\lim_{x\to\pm\infty} g(x)$

Formes indéterminées

$$\frac{\lambda}{0} \qquad \frac{0}{0} \qquad 0 \times \infty \qquad \infty - \infty \qquad \frac{\infty}{\infty}$$

F.I. $\frac{\lambda}{0}$

Soient f et g deux fonctions continues telles que $\lim_{x\to a} f(x) = \lambda \neq 0$ et $\lim_{x\to a} g(x) = 0$

On cherche $\lim_{x\to a} \left(\frac{f}{g}\right)(x)$.

- Cas où $\lim_{x\to a} g(x) = 0^+$ ou $\lim_{x\to a} g(x) = 0^-$.
  Alors $\lim_{x\to a} \frac{f}{g}(x) = \pm\infty$
  Exemple : $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$.
- Étudier les limites à gauche et à droite.
  Exemple : $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$.
- Éventuellement, limite non définie.
  Exemple : $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x\sin\left(\frac{1}{x}\right)}$ n'existe pas.

F.I. $\frac{\lambda}{0}$

Soient f et g deux fonctions continues telles que $\lim_{x \to a} f(x) = \lambda \neq 0$ et $\lim_{x \to a} g(x) = 0$

On cherche $\lim_{x \to a} \left(\frac{f}{g}\right)(x)$.

- Cas où $\lim_{x \to a} g(x) = 0^+$ ou $\lim_{x \to a} g(x) = 0^-$.

  Alors $\lim_{x \to a} \frac{f}{g}(x) = \pm\infty$

  Exemple : $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$.
- Étudier les limites à gauche et à droite.

  Exemple : $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$.
- Éventuellement, limite non définie.

  Exemple : $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x \sin\left(\frac{1}{x}\right)}$ n'existe pas.

F.I. $\frac{\lambda}{0}$

Soient f et g deux fonctions continues telles que $\lim_{x\to a} f(x) = \lambda \neq 0$ et $\lim_{x\to a} g(x) = 0$

On cherche $\lim_{x\to a} \left(\frac{f}{g}\right)(x)$.

- Cas où $\lim_{x\to a} g(x) = 0^+$ ou $\lim_{x\to a} g(x) = 0^-$.

  Alors $\lim_{x\to a} \frac{f}{g}(x) = \pm\infty$

  Exemple : $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$.
- Étudier les limites à gauche et à droite.

  Exemple : $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$.
- Éventuellement, limite non définie.

  Exemple : $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x\sin\left(\frac{1}{x}\right)}$ n'existe pas.

F.I. $\frac{\lambda}{0}$

Soient f et g deux fonctions continues telles que $\lim_{x\to a} f(x) = \lambda \neq 0$ et $\lim_{x\to a} g(x) = 0$

On cherche $\lim_{x\to a} \left(\frac{f}{g}\right)(x)$.

- Cas où $\lim_{x\to a} g(x) = 0^+$ ou $\lim_{x\to a} g(x) = 0^-$.

  Alors $\lim_{x\to a} \frac{f}{g}(x) = \pm\infty$

  Exemple : $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$.
- Étudier les limites à gauche et à droite.

  Exemple : $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$.
- Éventuellement, limite non définie.

  Exemple : $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x\sin\left(\frac{1}{x}\right)}$ n'existe pas.

F.I. $\frac{0}{0}$

Soient f et g deux fonctions continues telles que $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ et $\lim_{x\to a} g(x) = 0$

On cherche $\lim_{x\to a} \left(\frac{f}{g}\right)(x)$.

- S'agit-il de la limite d'un taux d'accroissement ? (voir dérivation)

  Exemple : $\lim_{x\to a} \frac{\cos(a) - \cos(x)}{a - x} = -\sin(a)$
- Dans le cas d'une fraction rationnelle, factoriser pas $(x - a)$ le numérateur et le dénominateur.

  Exemple : $\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^2 + x - 2} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^2(x+1)}{(x-1)(x+2)} = 0$
- S'agit-il d'un cas de limite connue ?

F.I. $\frac{0}{0}$

Soient f et g deux fonctions continues telles que $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ et $\lim_{x \to a} g(x) = 0$

On cherche $\lim_{x \to a} \left(\frac{f}{g}\right)(x)$.

- S'agit-il de la limite d'un taux d'accroissement ? (voir dérivation)

  Exemple : $\lim_{x \to a} \frac{\cos(a) - \cos(x)}{a - x} = -\sin(a)$

- Dans le cas d'une fraction rationnelle, factoriser pas $(x-a)$ le numérateur et le dénominateur.

  Exemple : $\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^2 + x - 2} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)^2(x+1)}{(x-1)(x+2)} = 0$

- S'agit-il d'un cas de limite connue ?

F.I. $\frac{0}{0}$

Soient f et g deux fonctions continues telles que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$

On cherche $\lim\limits_{x\to a} \left(\frac{f}{g}\right)(x)$.

- S'agit-il de la limite d'un taux d'accroissement ? (voir dérivation)

  Exemple : $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\cos(a) - \cos(x)}{a - x} = -\sin(a)$
- Dans le cas d'une fraction rationnelle, factoriser pas $(x - a)$ le numérateur et le dénominateur.

  Exemple : $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^2 + x - 2} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)^2(x+1)}{(x-1)(x+2)} = 0$
- S'agit-il d'un cas de limite connue ?

F.I. $\frac{0}{0}$

Soient f et g deux fonctions continues telles que $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ et $\lim_{x \to a} g(x) = 0$

On cherche $\lim_{x \to a} \left(\frac{f}{g}\right)(x)$.

- S'agit-il de la limite d'un taux d'accroissement ? (voir dérivation)

  Exemple : $\lim_{x \to a} \frac{\cos(a) - \cos(x)}{a - x} = -\sin(a)$
- Dans le cas d'une fraction rationnelle, factoriser pas $(x - a)$ le numérateur et le dénominateur.

  Exemple : $\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^2 + x - 2} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)^2(x+1)}{(x-1)(x+2)} = 0$
- S'agit-il d'un cas de limite connue ?

F.I. $0 \times \infty$

Soient f et h deux fonctions continues telles que $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ et $\lim_{x \to a} h(x) = \pm\infty$

On cherche $\lim_{x \to a} (fh)(x)$.

Ces cas sont similaires au précédent avec $g(x) = 1/h(x)$

- Limite d'un taux d'accroissement
- Simplification possible
- Cas de limite connue ? (Exemple : $\lim_{x \to 0} x \ln x$).

F.I. $0 \times \infty$

Soient f et h deux fonctions continues telles que $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ et $\lim_{x \to a} h(x) = \pm\infty$
On cherche $\lim_{x \to a} (fh)(x)$.
Ces cas sont similaires au précédent avec $g(x) = 1/h(x)$

- Limite d'un taux d'accroissement
- Simplification possible
- Cas de limite connue ? (Exemple : $\lim_{x \to 0} x \ln x$).

F.I. $0 \times \infty$

Soient f et h deux fonctions continues telles que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to a} h(x) = \pm\infty$

On cherche $\lim\limits_{x \to a} (fh)(x)$.

Ces cas sont similaires au précédent avec $g(x) = 1/h(x)$

- Limite d'un taux d'accroissement
- Simplification possible
- Cas de limite connue ? (Exemple : $\lim\limits_{x \to 0} x \ln x$).

F.I. $0 \times \infty$

Soient f et h deux fonctions continues telles que $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ et $\lim_{x \to a} h(x) = \pm\infty$
On cherche $\lim_{x \to a} (fh)(x)$.
Ces cas sont similaires au précédent avec $g(x) = 1/h(x)$

- Limite d'un taux d'accroissement
- Simplification possible
- Cas de limite connue ? (Exemple : $\lim_{x \to 0} x \ln x$).

F.I. $\infty - \infty$

Soient f et g deux fonctions continues telles que $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to a} g(x) = -\infty$

On cherche $\lim_{x \to a} (f+g)(x)$.

- Simplification possible ?
- Quantité conjuguée

  Exemple : $\lim_{x \to +\infty} (x - 1 - \sqrt{x^2 - 1})$.

F.I. $\infty - \infty$

Soient f et g deux fonctions continues telles que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = -\infty$

On cherche $\lim\limits_{x \to a} (f + g)(x)$.

- Simplification possible ?
- Quantité conjuguée

  Exemple : $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - 1 - \sqrt{x^2 - 1})$.

F.I. $\infty - \infty$

Soient f et g deux fonctions continues telles que $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to a} g(x) = -\infty$

On cherche $\lim_{x \to a} (f + g)(x)$.

- Simplification possible ?
- Quantité conjuguée

  Exemple : $\lim_{x \to +\infty} (x - 1 - \sqrt{x^2 - 1})$.

F.I. $\infty - \infty$

Soient f et g deux fonctions continues telles que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = -\infty$

On cherche $\lim\limits_{x \to a} (f+g)(x)$.

- Simplification possible ?
- Quantité conjuguée

  Exemple : $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - 1 - \sqrt{x^2 - 1})$.

$$\begin{aligned} x - 1 - \sqrt{x^2-1} &= \frac{(x-1)^2 - \sqrt{x^2-1}^2}{x - 1 + \sqrt{x^2-1}} \\ &= \frac{-2x+1}{x-1+\sqrt{x^2-1}} \\ &= \frac{x}{x} \frac{-2+\frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x} + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} -1 \end{aligned}$$

Plan détaillé

3 Limites

- Limites finies l
- Limites infinies
- Opérations sur les limites et formes indéterminées
- Limites connues
- Limites par comparaison

Polynômes en $\pm\infty$

En $\pm\infty$, les limites des polynômes sont celles du terme de degré le plus élevé.

Exemples :

- $f(x) = 2x^5 + 4x^2 + 7x + 1$
  $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} 2x^5 = -\infty.$
- $f(x) = -2x^6 - 4x^5 + 5x^2 + 100$
  $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} -2x^6 = -\infty.$

Fractions rationnelles en $\pm\infty$

Une fraction rationnelle est un quotient de deux polynômes $N(x)$ et $D(x)$. $f(x) = \dfrac{N(x)}{D(x)}$

Les limites en $\pm\infty$ dépendent des degrés de N et D.

- N est de plus haut degré que $D \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} = \pm\infty$

  Exemple : $\dfrac{x^5+1}{x^4+x} \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$
- N est de plus petit degré que $D \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} = 0^{\pm}$

  Exemple : $\dfrac{x^4+x}{x^5+1} \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0^{-}$
- N et D sont de même degré $\Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} = l$ où l est le rapport des coef. des termes de plus haut degré.

  Exemple : $\dfrac{4x^5+x^4+3x^2}{-x^5+6x^2+x+1} \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -4$

Produits d'exponentielle

- $\forall \lambda > 0, \forall \mu > 0, \lim\limits_{x \to +\infty} x^{\lambda} e^{-x^{\mu}} = 0$
- $\forall \lambda > 0, \forall \mu > 0, \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{x^{\mu}}}{x^{\lambda}} = +\infty$

Produits de logarithme

- $\forall \lambda > 0, \forall \mu > 0, \lim\limits_{x \to 0} x^{\lambda} \ln x^{\mu} = 0$
- $\forall \lambda > 0, \forall \mu > 0, \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x^{\mu}}{x^{\lambda}} = 0$
- $\forall \lambda > 0, \forall \mu > 0, \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^{\lambda}}{\ln x^{\mu}} = +\infty$

Plan détaillé

Minoration / Majoration par une fonction $\to \pm\infty$

- S'il existe une fonction g et un réel A tel que $\forall x \geqslant A, f(x) \geqslant g(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
- S'il existe une fonction g et un réel A tel que $\forall x \geqslant A, f(x) \leqslant g(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$, alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

Théorème “des gendarmes”

- S'il existe deux fonction g et h, et un réel A tel que $\forall x \geqslant A, g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} h(x) = l$, alors $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$
- S'il existe une fonction g et un réel A tel que $\forall x \geqslant A, |f(x) - l| \leqslant g(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$, alors $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$

Table des matières

Plan détaillé

Taux d'accroissement

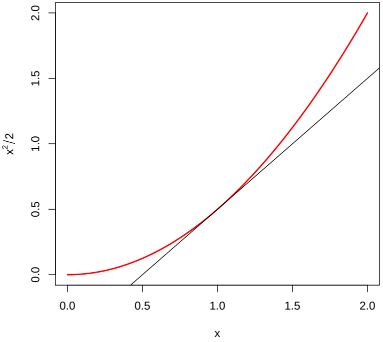
Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ une fonction réelle d'une variable réelle, $x \in D_f$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}$.

Le taux d'accroissement de f entre x et $x+\varepsilon$ est

$$\frac{\Delta_f}{\Delta_x} = \frac{f(x+\varepsilon)-f(x)}{x+\varepsilon-x}$$

Si $\exists l \in \mathbb{R}$, $\frac{\Delta_f}{\varepsilon} \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} l$, alors l est appelé “nombre dérivé de la fonction f en x”.
On note

$$f'(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{f(x+\varepsilon)-f(x)}{\varepsilon} = l$$



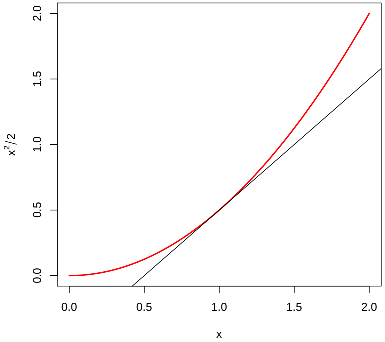
Équation de la tangente

Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ une fonction réelle d'une variable réelle dérivable en $x_0 \in D_f$.

L'équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f en x_0 est :

$$y = f(x_0) + (x - x_0) \times f'(x_0)$$

Exemple : La tangente à la courbe de $f : x \mapsto \frac{1}{2}x^2$ en $x_0 = 1$ a pour équation $y = \frac{1}{2} + 1 \times (x - 1) = x - \frac{1}{2}$.



Plan détaillé

Opérations sur les dérivées

f et g sont deux fonctions continues et dérivables, $\lambda \in \mathbb{R}$

$$(\lambda f)' = \lambda f'$$

$$(f+g)' = f' + g'$$

$$(fg)' = f'g + fg'$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

$$(f \circ g)' = g' f' \circ g$$

Plan détaillé

Dérivées usuelles

- $f(x) = k$ où $k \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 0$
- $f(x) = x^a$ où $a \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = ax^{a-1}$

$$\begin{array}{ll}
a = 1 & f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1 \\
a = -1 & f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} \\
a = \frac{1}{2} & f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \\
a = \dfrac{n}{p} & f(x) = \sqrt[p]{x^n} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{n}{p\sqrt[p]{x^{n-p}}}
\end{array}$$

Dérivées usuelles

$$f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$$

$$f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$f(x) = a^x \Rightarrow f'(x) = a^x \ln a$$

Fonctions trigonométriques

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sin x &&\Rightarrow f'(x) = \cos x\\
f(x) &= \cos x &&\Rightarrow f'(x) = -\sin x\\
f(x) &= \tan x &&\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \arcsin x &&\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\\
f(x) &= \arccos x &&\Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\\
f(x) &= \arctan x &&\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x^2}
\end{aligned}
$$

Exemple de démonstration

On note $\forall x \in [-1,1], f(x) = \arcsin(\sin x) = x$, et on calcule $f'(x)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sin'(x)\arcsin'(\sin x) \\ &= \cos(x)\arcsin'(\sin x) \\ &= 1 \end{aligned}$$

On pose $t = \sin x \Rightarrow \cos x = \sqrt{1-t^2}$. On obtient alors

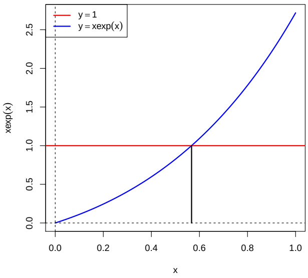
$$\left(\sqrt{1-t^2}\right)\arcsin'(t) \Leftrightarrow \arcsin'(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$$

Plan détaillé

4. Dérivation
   - Taux d'acroissement local
   - Opérations sur les dérivées
   - Dérivées usuelles
   - Propriétés diverses
   - Dérivée et variation
   - tableau de variations

Théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$, tel que $f([a, b]) = [c, d]$.
$\forall y \in [c, d], \exists x \in [a, b], f(x) = y$.
Exemple : $f : x \mapsto xe^x$ sur l'intervalle $[0, 1]$, existe-t-il $x \in [0, 1]$ tel que $f(x) = 1$?

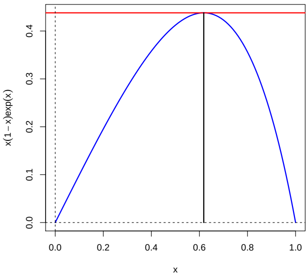


Théorème de Rolle

Soit f une fonction

- continue sur un intervalle $[a, b]$,
- dérivable sur $]a, b[$
- telle que $f(a) = f(b)$,

alors $\exists x \in]a, b[, f'(x) = 0$.
Exemple : $f : x \mapsto x(1-x)e^x$ sur $[0, 1]$.
Il existe $x \in]0, 1[$ tel que $f'(x) = 0$.



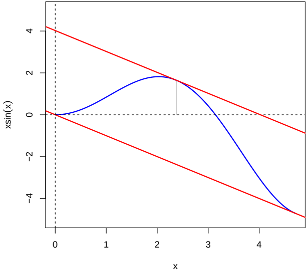
Théorème des accroissements finis

Soit f une fonction

- continue sur un intervalle $[a, b]$,
- dérivable sur $]a, b[$

alors $\exists x \in]a, b[, f'(x) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Exemple : $f : x \mapsto x \sin x$ sur $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$.
Il existe $x \in]0, 1[$ tel que $f'(x) = -1$.



Plan détaillé

4 Dérivation
- Taux d'acroissement local
- Opérations sur les dérivées
- Dérivées usuelles
- Propriétés diverses
- Dérivée et variation
- tableau de variations

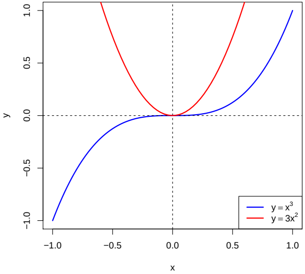
Variation

Soit f une fonction dérivable sur sur I.

$$\forall x \in I,\, f'(x) \geq 0$$
$$\Updownarrow$$
$$f \text{ est croissante sur } I$$

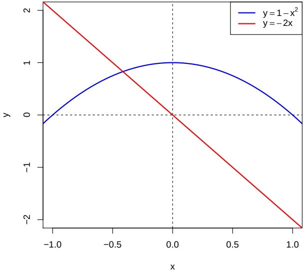
Exemple : $x \mapsto x^3$

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{b \to a} \frac{b^3 - a^3}{b - a} \\ &= \lim_{b \to a} \frac{(b-a)(b^2 + ab + a^2)}{b - a} \\ &= 3a^2 \geq 0 \end{aligned}$$



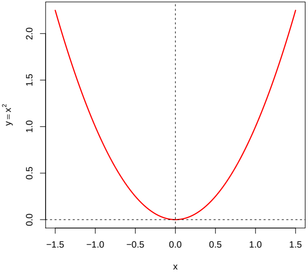
Extremum local

Soient $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction continue dérivable sur voisinage de a, telle que f' s'annule en changeant de signe en a.
Alors f possède un extremum local en a.
Exemple :
$f(x) = 1 - x^2 \Rightarrow f'(x) = -2x$



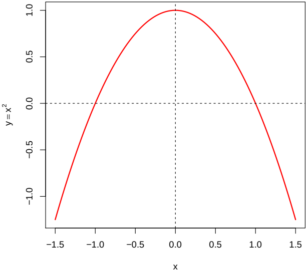
Concavité / Convexité

Soit f une fonction dérivable deux fois sur I.
Si $\forall x \in I$, $f''(x) > 0$, alors la courbe représentative de f est convexe sur I.
Exemple : $f : x \mapsto x^2$
Moyen mnémotechnique : conVexe



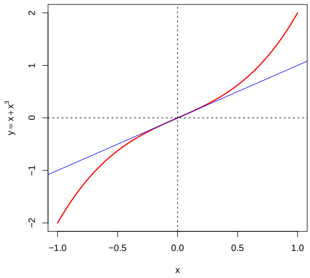
Concavité / Convexité

Soit f une fonction dérivable deux fois sur I.
Si $\forall x \in I$, $f''(x) < 0$, alors la courbe représentative de f est concave sur I.
Exemple : $f : x \mapsto 1 - x^2$
Moyen mnémotechnique : concAve



Points d'inflexion

Soit f une fonction dérivable deux fois sur un voisinage de $a \in \mathbb{R}$.
Si f'' s'annule et change de signe en a, alors la courbe représentative de f présente un point d'inflexion en a.
Exemple :
$f(x) = x + x^3 \Rightarrow f''(x) = 6x$



Plan détaillé

4 Dérivation
- Taux d'acroissement local
- Opérations sur les dérivées
- Dérivées usuelles
- Propriétés diverses
- Dérivée et variation
- tableau de variations

Un exemple

La concentration de dioxygène (en mg/L) dans l'eau d'un sac de transport de poissons vivants vérifie :
$C(t) = 10 + 2(1 - e^{-t}) - 0.1t$ (pour $t > 0$).
$C'(t) = 2e^{-t} - 0.1$.

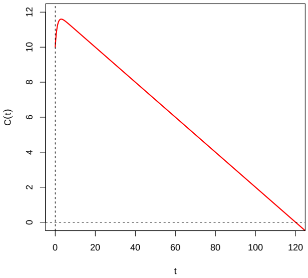
$$C'(t) > 0 \Leftrightarrow -t > \ln\frac{0.1}{2} \Leftrightarrow t < \ln 20$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{t\to\infty} e^{-t} = 0 \\ \lim\limits_{t\to\infty} -0.1t = -\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{t\to\infty} y_{O_2}(t) = -\infty$$

Un exemple

$$C(t) = 10 + 2(1 - e^{-t}) - 0.1t \text{ (pour } t > 0\text{).}$$

t	0		$\ln 20$		$+\infty$
$C'(t)$		$+$	0	-	
$C(t)$			≈ 11.6		
	10	$\nearrow$		$\searrow$	$-\infty$



Conclusions : limites du modèle. . .