

# Analyse des systèmes dynamiques dans $\mathbb{R}^2$

Automne 2010

S. Mousset

Université Claude Bernard Lyon I – France

# Table des matières

- 1 Introduction : le modèle proies-prédateurs de Lotka-Volterra
- 2 Les systèmes planaires dans  $\mathbb{R}^2$
- 3 Étude qualitative des systèmes non linéaires dans  $\mathbb{R}^2$
- 4 Exemples classiques
- 5 Pour aller plus loin

# Plan détaillé

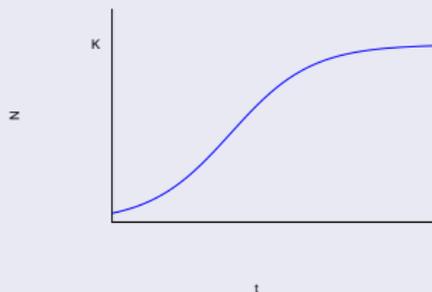
- 1 Introduction : le modèle proies-prédateurs de Lotka-Volterra
  - Les équations du modèle
  - Portrait de phase
  - Définitions

# Le modèle proies-prédateurs de Lotka-Volterra

Dynamique des populations de proies et prédateurs sans interactions

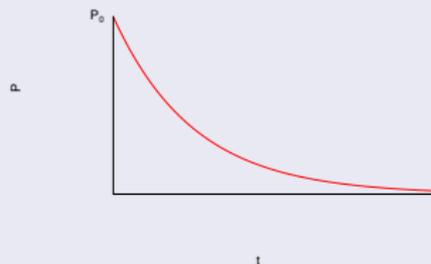
## Les proies $N$

- croissance logistique, paramètres  $r$  et  $K$ .



## Les prédateurs $P$

- décroissance exponentielle, paramètre  $\mu$



# Le modèle proies-prédateurs de Lotka-Volterra

## Les interactions proies-prédateurs

Si les déplacements de proies et prédateurs se font au hasard, alors le nombre de rencontres entre proies et prédateurs est proportionnel au produit  $NP$ .

### Les proies $N$

- Consommation à la vitesse  $\alpha NP$ .
- $\alpha$  caractérise l'efficacité des attaques des prédateurs.

### Les prédateurs

- Reproduction à la vitesse  $\beta NP$ .
- $\beta$  caractérise le rendement des attaques en termes de reproduction des prédateurs.

# Le modèle proies-prédateurs de Lotka-Volterra

## Les équations du modèle

On a le système de deux EDO du premier ordre suivant :

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K}\right) - \alpha NP \\ \frac{dP}{dt} = -\mu P + \beta NP \end{cases}$$

Dans le plan  $(N, P)$ , on peut étudier le signe de  $\frac{dN}{dt}$  et  $\frac{dP}{dt}$ .

# Plan détaillé

- 1 Introduction : le modèle proies-prédateurs de Lotka-Volterra
  - Les équations du modèle
  - Portrait de phase
  - Définitions

## Portrait de phase

Signe de  $\frac{dN}{dt}$

L'évolution du nombre de proies dépend du signe de  $\frac{dN}{dt}$

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} > 0 &\iff rN \left(1 - \frac{N}{K}\right) - \alpha NP > 0 \\ &\iff N \left(r - \frac{rN}{K} - \alpha P\right) > 0 \\ &\iff P < \frac{r}{\alpha} \left(1 - \frac{N}{K}\right) \end{aligned}$$

$$\frac{dN}{dt} = 0 \text{ pour } N = 0 \text{ et } P = \frac{r}{\alpha} \left(1 - \frac{N}{K}\right).$$

# Portrait de phase

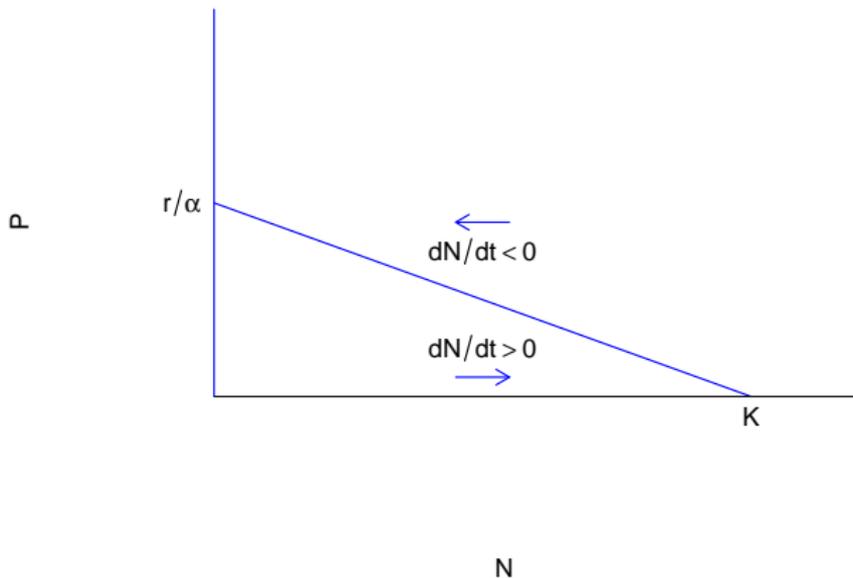
Signe de  $\frac{dP}{dt}$ 

L'évolution du nombre de prédateurs dépend du signe de  $\frac{dP}{dt}$

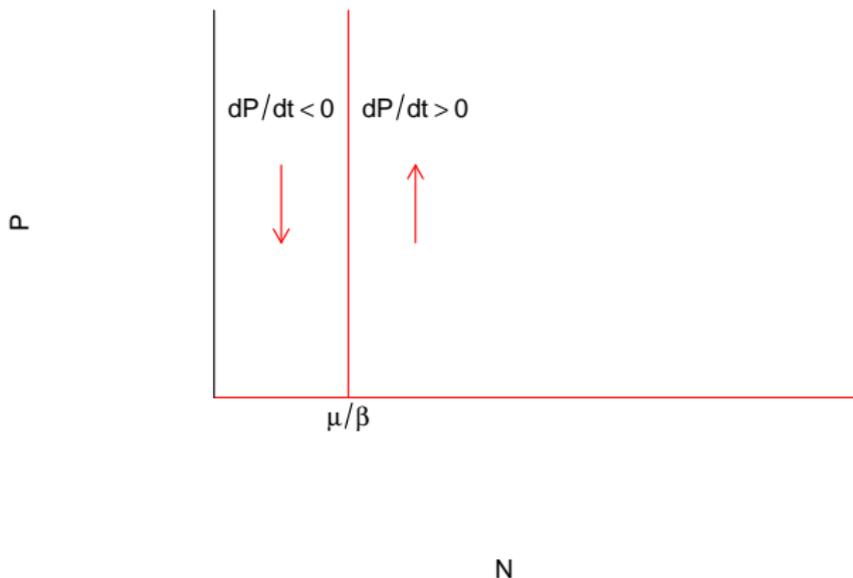
$$\begin{aligned}\frac{dP}{dt} > 0 &\iff -\mu P + \beta NP > 0 \\ &\iff P(\beta N - \mu) > 0 \\ &\iff N > \frac{\mu}{\beta}\end{aligned}$$

$$\frac{dP}{dt} = 0 \text{ pour } P = 0 \text{ et } N = \frac{\mu}{\beta}.$$

# Portrait de phase

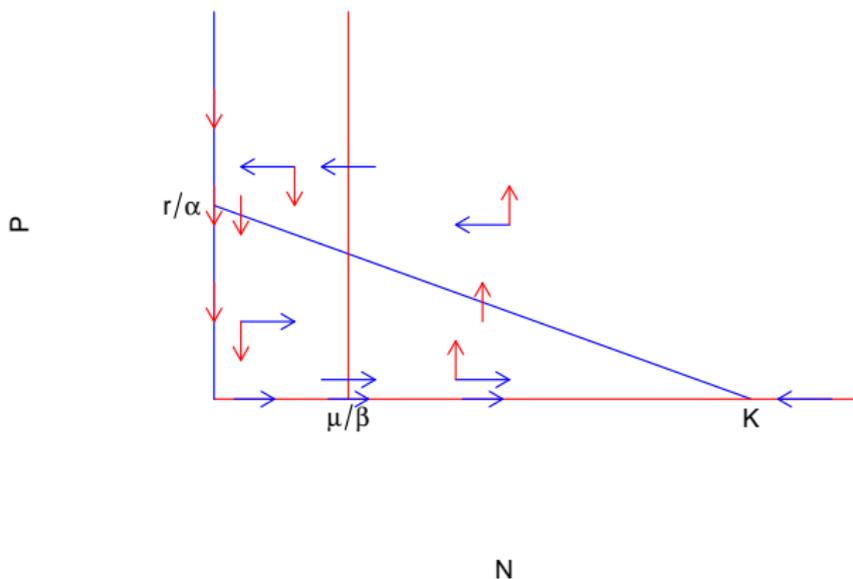
Signe de  $\frac{dN}{dt}$ 

# Portrait de phase

Signe de  $\frac{dP}{dt}$ 

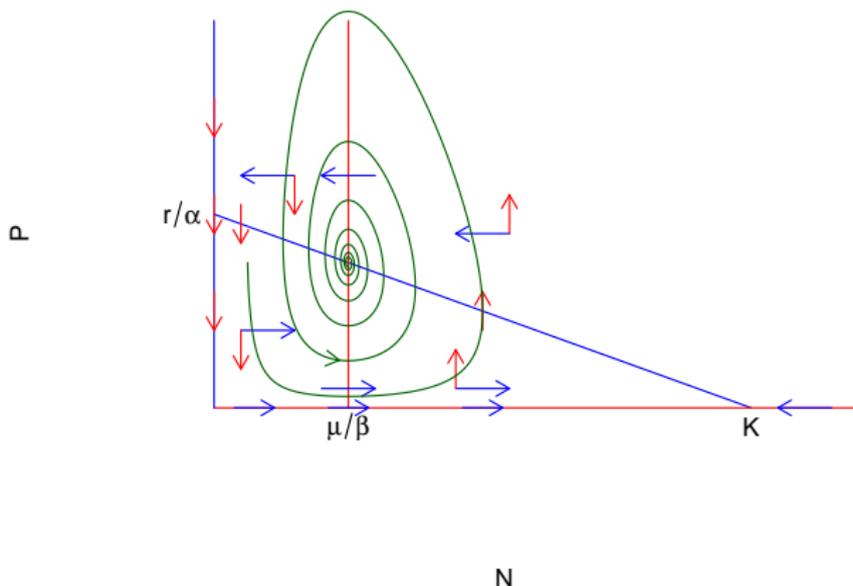
# Portrait de phase

Vecteurs vitesse

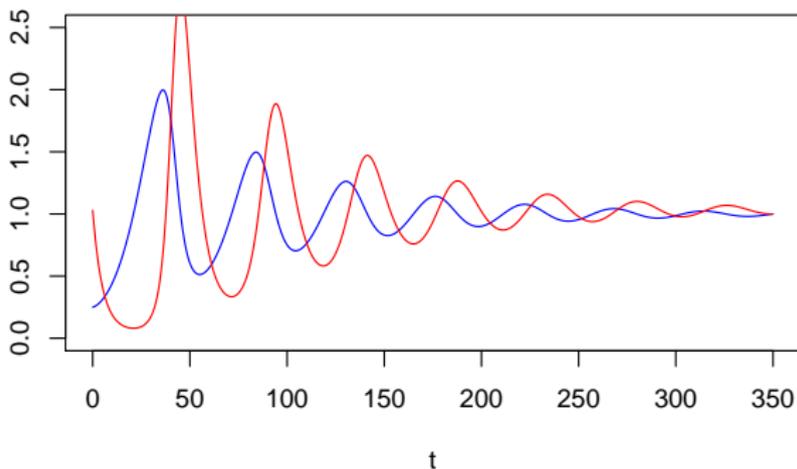


# Portrait de phase

## Évolution du système



# Chroniques



# Plan détaillé

- 1 Introduction : le modèle proies-prédateurs de Lotka-Volterra
  - Les équations du modèle
  - Portrait de phase
  - Définitions

# Définitions

## Point d'équilibre

Soit un système dynamique d'EDO tel que

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = g(x, y) \end{cases}$$

Un point d'équilibre de ce système est un point  $(x^*, y^*)$  qui vérifie :

$$\begin{cases} \left. \frac{dx}{dt} \right|_{x=x^*, y=y^*} = f(x^*, y^*) = 0 \\ \left. \frac{dy}{dt} \right|_{x=x^*, y=y^*} = g(x^*, y^*) = 0 \end{cases}$$

# Définitions

## Isoclines nulles

Soit un système dynamique d'EDO tel que

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = g(x, y) \end{cases}$$

Les isoclines nulles de ce systèmes sont l'ensemble des points du plan qui vérifient :

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y) = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{dy}{dt} = g(x, y) = 0$$

Sur le portrait de phase, on parle d'isocline horizontale  $\left(\frac{dy}{dt} = 0\right)$

ou verticale  $\left(\frac{dx}{dt} = 0\right)$ , selon la direction des vecteurs vitesses en ces points.

# Table des matières

- 1 Introduction : le modèle proies-prédateurs de Lotka-Volterra
- 2 Les systèmes planaires dans  $\mathbb{R}^2$**
- 3 Étude qualitative des systèmes non linéaires dans  $\mathbb{R}^2$
- 4 Exemples classiques
- 5 Pour aller plus loin

# Plan détaillé

- 2 Les systèmes planaires dans  $\mathbb{R}^2$ 
  - Définitions
  - Solutions des systèmes d'EDO linéaires (cas de 2 valeurs propres réelles)
  - Exponentielles de matrices et formes de Jordan
  - Typologie des systèmes planaires
  - Synthèse

# Système planaire

## Définition

Un système d'EDO tel que

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = g(x, y) \end{cases}$$

est un système planaire si et seulement si

$$\exists(\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma') \in \mathbb{R}^6 \mid \begin{cases} f(x, y) = \alpha x + \beta y + \gamma \\ g(x, y) = \alpha' x + \beta' y + \gamma' \end{cases}$$

# Système planaire

## Propriété

Si  $(x^*, y^*)$  est un point d'équilibre d'un système planaire, on effectue le changement de variable  $x = x^* + u \iff u = x - x^*$  et  $y = y^* + v \iff v = y - y^*$

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = \frac{dx}{dt} = f(x^* + u, y^* + v) \\ \frac{dv}{dt} = \frac{dy}{dt} = g(x^* + u, y^* + v) \end{cases}$$

Soit

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = \alpha u + \beta v \\ \frac{dv}{dt} = \alpha' u + \beta' v \end{cases}$$

# Système planaire

## Propriété

Pour tout système planaire, il existe un système planaire équivalent s'écrivant  $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = a_{11}u + a_{12}v \\ \frac{dv}{dt} = a_{21}u + a_{22}v \end{cases}$$

Pour l'étude des systèmes non planaires, nous utiliserons un développement de Taylor du premier degré pour nous placer dans un système planaire équivalent au voisinage des points d'équilibre.

# Système planaire

## Écriture matricielle

Soit un système planaire du type

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = a_{11}u + a_{12}v \\ \frac{dv}{dt} = a_{21}u + a_{22}v \end{cases}$$

Ce système est équivalent à l'écriture matricielle  $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{M}\mathbf{X}$  avec

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

# Système planaire

## Écriture matricielle

Soit un système planaire du type

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = a_{11}u + a_{12}v \\ \frac{dv}{dt} = a_{21}u + a_{22}v \end{cases}$$

La matrice  $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$  est appelée “matrice Jacobienne” du système.

# Plan détaillé

- 2 Les systèmes planaires dans  $\mathbb{R}^2$ 
  - Définitions
  - Solutions des systèmes d'EDO linéaires (cas de 2 valeurs propres réelles)
  - Exponentielles de matrices et formes de Jordan
  - Typologie des systèmes planaires
  - Synthèse

# Équation caractéristique

Soit un système planaire du type admettant la matrice Jacobienne

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de  $\mathbf{M}$  sont les solutions de l'équation caractéristique

$$\det(\mathbf{M} - \lambda\mathbf{I}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - \lambda \operatorname{tr}(\mathbf{M}) + \det(\mathbf{M}) = 0$$

# Équation caractéristique

Soit un système planaire du type admettant la matrice Jacobienne

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

La nature des solutions dépend du discriminant de l'équation caractéristique  $\lambda^2 - \lambda \operatorname{tr}(\mathbf{M}) + \det(\mathbf{M}) = 0$

$$\Delta = \operatorname{tr}(\mathbf{M})^2 - 4 \det(\mathbf{M})$$

$$\Delta > 0$$

$\mathbf{M}$  admet deux valeurs propres réelles

$$\lambda_1 = \frac{\text{tr}(\mathbf{M}) + \sqrt{\Delta}}{2} \quad \lambda_2 = \frac{\text{tr}(\mathbf{M}) - \sqrt{\Delta}}{2}$$

On effectue un changement de bases pour se placer dans une base où  $\mathbf{M}$  est diagonale

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{P}$$

où  $\mathbf{M}$  est la matrice de passage constituée par les vecteurs propres de  $\mathbf{M}$  associés à  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ .

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{21} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix}$$

$$\Delta > 0$$

Alors, on pose

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \mathbf{P} \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{P}^{-1} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix}$$

On a alors

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \mathbf{P}^{-1} \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{M} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{M} \mathbf{P} \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{D} \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Delta > 0$$

On a alors

$$\begin{cases} \dot{w} = \lambda_1 w \\ \dot{z} = \lambda_2 z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} w(t) = K_1 e^{\lambda_1 t} \\ z(t) = K_2 e^{\lambda_2 t} \end{cases}$$

d'où

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \mathbf{P} \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{21} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix}$$

soit

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = K_1 \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{12} \end{pmatrix} e^{\lambda_1 t} + K_2 \begin{pmatrix} p_{21} \\ p_{22} \end{pmatrix} e^{\lambda_2 t}$$

# Plan détaillé

- 2 Les systèmes planaires dans  $\mathbb{R}^2$ 
  - Définitions
  - Solutions des systèmes d'EDO linéaires (cas de 2 valeurs propres réelles)
  - Exponentielles de matrices et formes de Jordan
  - Typologie des systèmes planaires
  - Synthèse

# Solutions de $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{M}\mathbf{X}$

Soit un système planaire du type  $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{M}\mathbf{X}$ , les solutions du système sont du type :

$$\mathbf{X}(t) = e^{\mathbf{M}t} \mathbf{X}_0$$

où  $e^{\mathbf{M}}$  est l'exponentielle de la matrice  $\mathbf{M}$  définie par :

$$e^{\mathbf{M}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{M}^k}{k!},$$

où  $\mathbf{M}^0 = \mathbf{I}$  (la matrice identité) et  $\mathbf{X}_0$  est imposé par les conditions initiales du système.

# Propriétés des exponentielles de Matrices

- 1 Si  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  commutent ( $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ ), alors  $e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}} = e^{\mathbf{A}}e^{\mathbf{B}}$ .
- 2 Si  $\mathbf{B} = -\mathbf{A}$ , alors  $e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}} = e^{\mathbf{0}} = \mathbf{I}$ , d'où  $e^{-\mathbf{A}} = (e^{\mathbf{A}})^{-1}$ .
- 3 Si  $\mathbf{B}$  est semblable à  $\mathbf{A}$  ( $\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ ), alors  $e^{\mathbf{B}} = \mathbf{P}^{-1}e^{\mathbf{A}}\mathbf{P}$ .
- 4 Si  $\mathbf{B} = \mathbf{A}t$ , alors  $\frac{d}{dt}e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t} = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{A}$ .

Formes de Jordan dans  $\mathbb{R}^2$ 

## Proposition

Soit  $\mathbf{A}$  une matrice réelle carrée de dimension 2, alors il existe une matrice réelle inversible  $\mathbf{P}$  telle que  $\mathbf{J} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$  est de l'une des formes suivantes :

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

$\mathbf{J}$  est la “forme de Jordan” réelle associée à  $\mathbf{A}$ .

Formes de Jordan dans  $\mathbb{R}^2$ 

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \Rightarrow e^{\mathbf{J}t} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix} \Rightarrow e^{\mathbf{J}t} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_0 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_0 t} \end{pmatrix} = e^{\lambda_0 t} \mathbf{I}_2$$

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix} \Rightarrow e^{\mathbf{J}t} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_0 t} & te^{\lambda_0 t} \\ 0 & e^{\lambda_0 t} \end{pmatrix} = e^{\lambda_0 t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \Rightarrow e^{\mathbf{J}t} = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos(\beta t) & -\sin(\beta t) \\ \sin(\beta t) & \cos(\beta t) \end{pmatrix}$$

# Plan détaillé

- 2 Les systèmes planaires dans  $\mathbb{R}^2$ 
  - Définitions
  - Solutions des systèmes d'EDO linéaires (cas de 2 valeurs propres réelles)
  - Exponentielles de matrices et formes de Jordan
  - Typologie des systèmes planaires
  - Synthèse

# Forme de Jordan associée à la Jacobienne

Soit un système planaire du type

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = a_{11}u + a_{12}v \\ \frac{dv}{dt} = a_{21}u + a_{22}v \end{cases}$$

Il existe une forme de Jordan réelle  $\mathbf{J}$  associée à la matrice Jacobienne du système  $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ .

$\mathbf{J}$  et  $\mathbf{M}$  sont semblables donc  $\mathbf{J}$  et  $\mathbf{M}$  ont les mêmes valeurs propres.

## Forme de Jordan associée à la Jacobienne

Valeurs propres de la Jacobienne

Les valeurs propres de  $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$  sont les solutions de  $\det(\mathbf{M} - \lambda\mathbf{I}) = 0$ .

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{M} - \lambda\mathbf{I}) &= 0 \\ \iff \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} &= 0 \\ \iff (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21} &= 0 \\ \iff \lambda^2 - \lambda(a_{11} + a_{22}) + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} &= 0 \\ \iff \lambda^2 - \operatorname{tr}(\mathbf{M})\lambda + \det(\mathbf{M}) &= 0 \end{aligned}$$

# Forme de Jordan associée à la Jacobienne

## Équation caractéristique de la Jacobienne

Les valeurs propres de  $\mathbf{M}$  sont les solutions de l'équation caractéristique

$$\lambda^2 - \operatorname{tr}(\mathbf{M})\lambda + \det(\mathbf{M}) = 0.$$

On distingue plusieurs cas selon le signe de

$$\Delta = (\operatorname{tr}(\mathbf{M}))^2 - 4\det(\mathbf{M}).$$

# Typologie des systèmes planaires

$\Delta > 0$ ,  $\mathbf{M}$  a 2 valeurs propres réelles distinctes

- On note  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  les valeurs propres de  $\mathbf{M}$ .

- Des vecteurs propres associés sont  $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{12} \end{pmatrix}$  et

$$\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} u_{21} \\ u_{22} \end{pmatrix}.$$

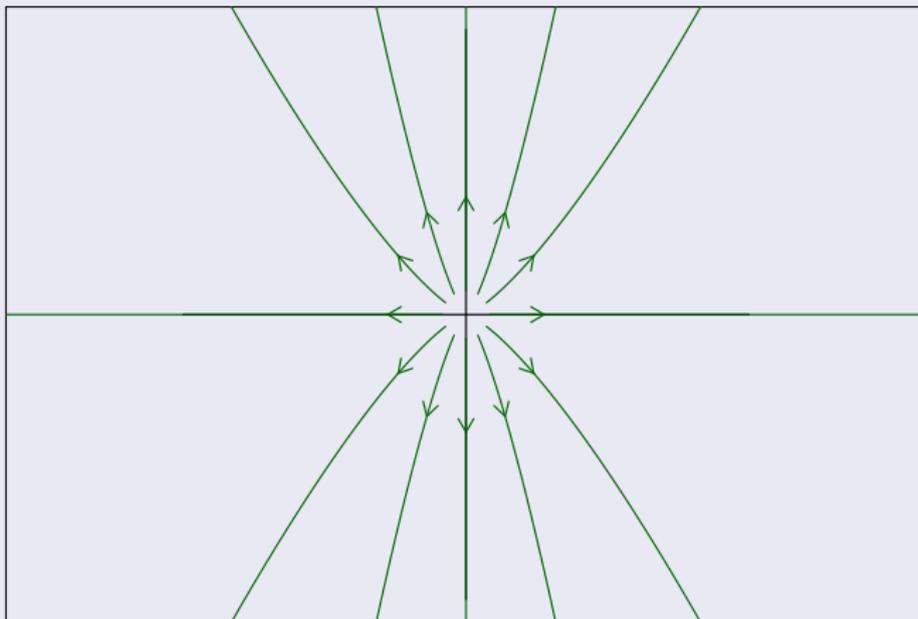
- La matrice de passage est  $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{21} \\ u_{12} & u_{22} \end{pmatrix}$

- $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{P} = \mathbf{J} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

# Typologie des systèmes planaires

2 valeurs propres réelles distinctes positives

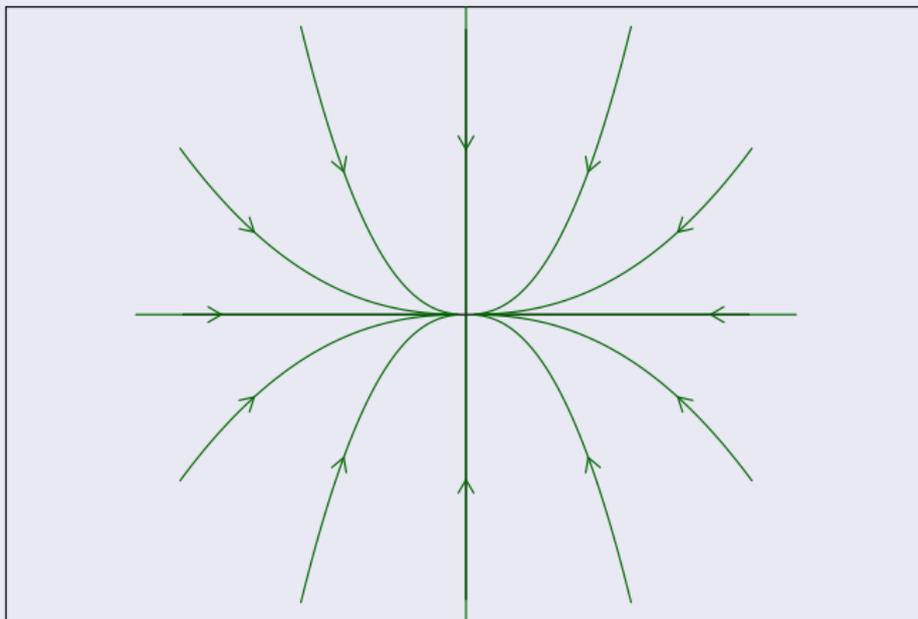
$\lambda_1 > 0$  et  $\lambda_2 > 0$  Noeud instable



# Typologie des systèmes planaires

2 valeurs propres réelles distinctes négatives

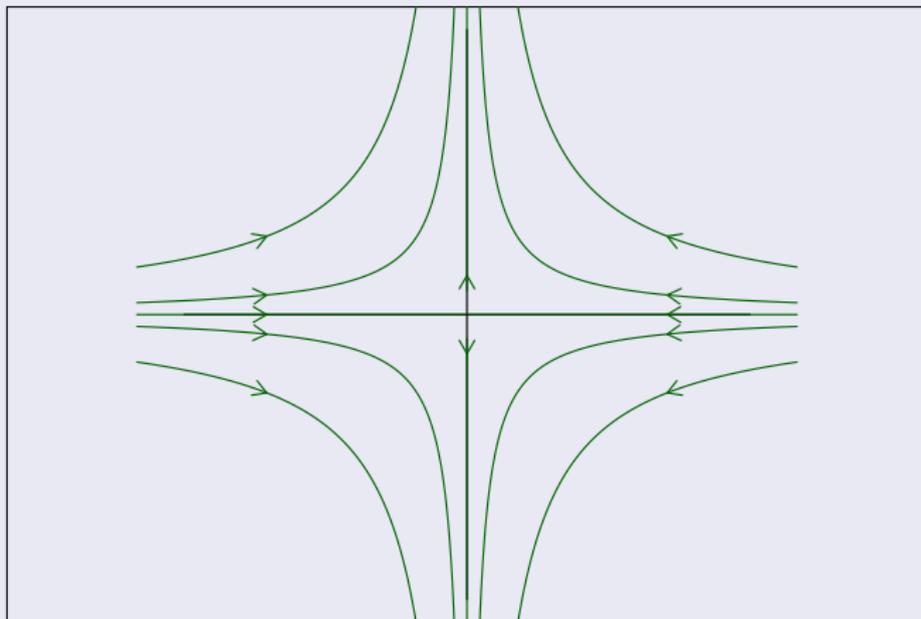
$\lambda_1 < 0$  et  $\lambda_2 < 0$  Noeud stable



# Typologie des systèmes planaires

2 valeurs propres réelles de signes opposés

$\lambda_1 < 0$  et  $\lambda_2 > 0$  ou  $\lambda_1 > 0$  et  $\lambda_2 < 0$  Point selle



# Typologie des systèmes planaires

$\Delta = 0$ ,  $\mathbf{M}$  a 1 valeur propre double réelle

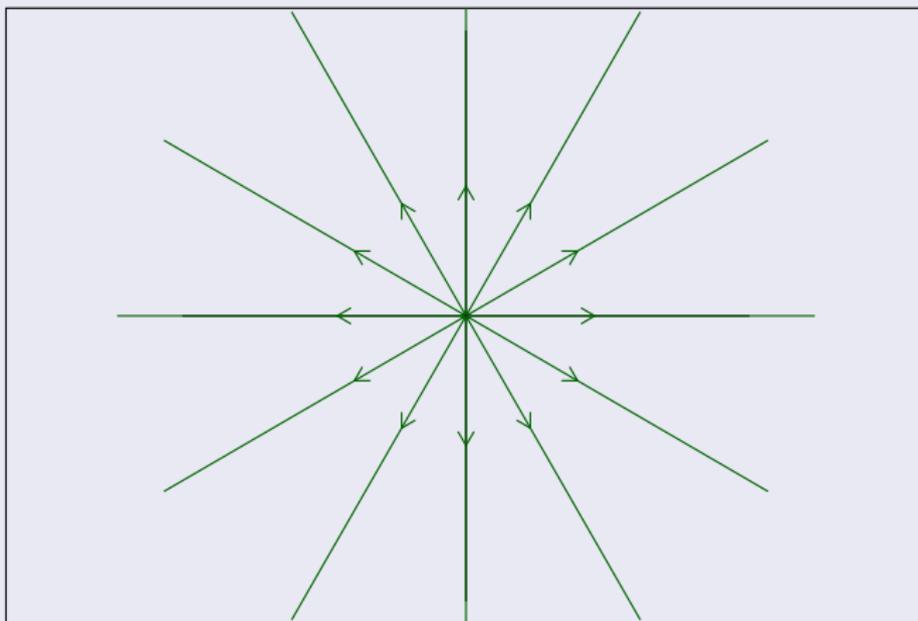
On distingue deux cas possibles :

- 1  $\mathbf{M}$  est déjà diagonale,  $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$ , alors  $\mathbf{M}$  est déjà sous sa forme de Jordan  $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$
- 2  $\mathbf{M}$  n'est pas déjà diagonale.

# Typologie des systèmes planaires

1 valeur propre réelle double et  $M$  est diagonale

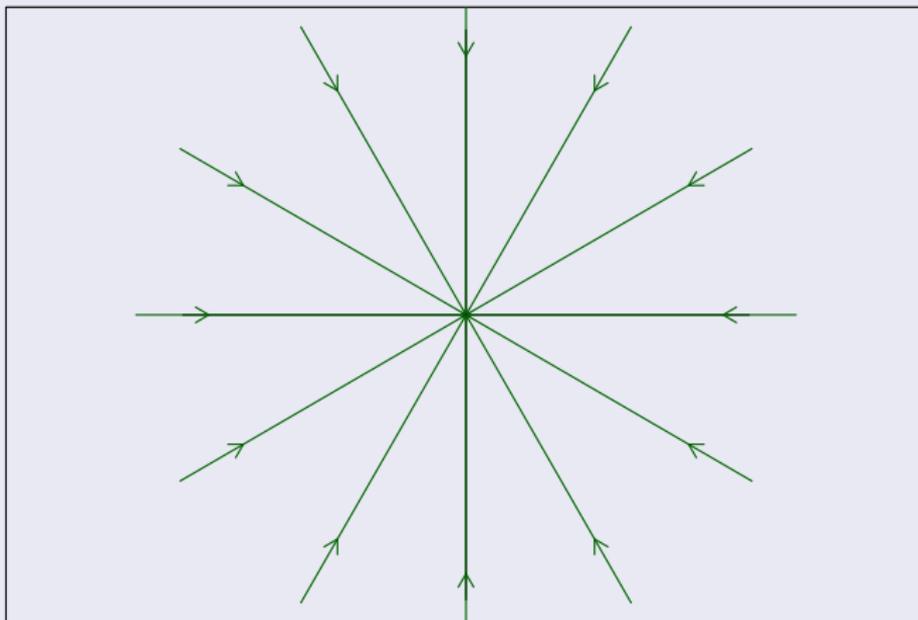
$\lambda_0 > 0$  Étoile instable



# Typologie des systèmes planaires

1 valeur propre réelle double et  $M$  est diagonale

$\lambda_0 < 0$  Étoile stable



# Typologie des systèmes planaires

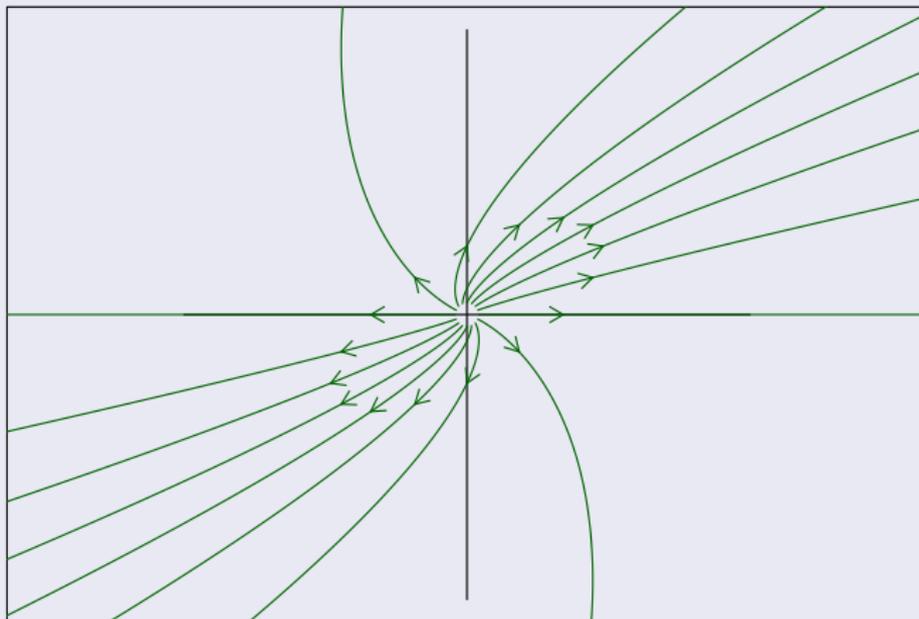
$\Delta = 0$ ,  $M$  a 1 valeur propre double réelle et n'est pas diagonale

- On note  $\lambda_0$  la valeur propre double de  $M$ .
- Un vecteur propre associé est  $\mathbf{u}_0 = \begin{pmatrix} u_{01} \\ u_{02} \end{pmatrix}$  et  $\mathbf{m} = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix}$  est un vecteur non colinéaire à  $\mathbf{u}_0$ .
- La matrice  $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} u_{01} & m_1 \\ u_{02} & m_2 \end{pmatrix}$  permet de triangulariser  $M$ .  
 $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & c \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$  où  $c$  est un réel non nul.
- Pour triangulariser  $M$ , on utilise une nouvelle matrice de passage  $\mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c^{-1} \end{pmatrix} \mathbf{P}$
- $\mathbf{P}_1^{-1}\mathbf{M}\mathbf{P}_1 = \mathbf{J} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$

# Typologie des systèmes planaires

1 valeur propre réelle double et  $M$  n'est pas diagonale

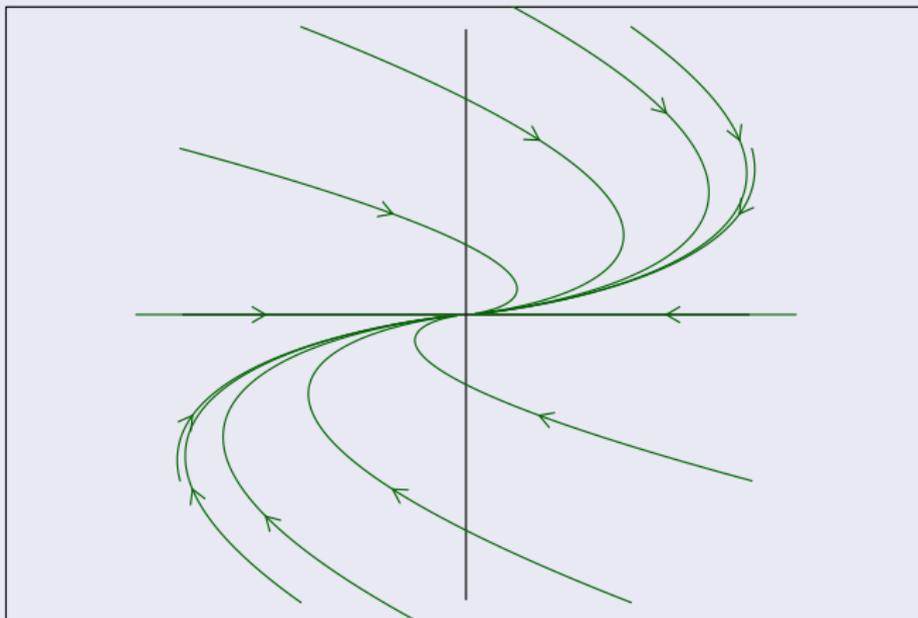
$\lambda_0 > 0$  Noeud dégénéré instable



# Typologie des systèmes planaires

1 valeur propre réelle double et  $M$  n'est pas diagonale

$\lambda_0 < 0$  Noeud dégénéré stable



# Typologie des systèmes planaires

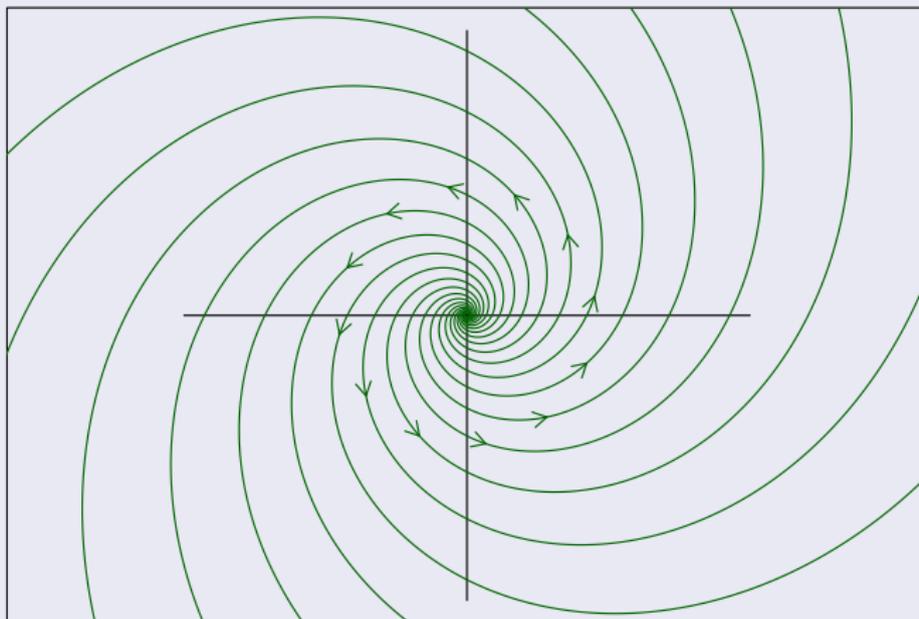
$\Delta < 0$ ,  $M$  a 2 valeurs propres complexes conjuguées

- On note  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ , avec  $\alpha = \frac{\text{tr}(M)}{2}$  et  $\beta = \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2}$ .
- Des vecteurs propres associés à  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont également complexes conjugués, et on peut écrire  $\mathbf{u}_{1,2} = \mathbf{a} \pm i\mathbf{b}$ , où  $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$  et  $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$  sont des vecteurs réels de  $\mathbb{R}^2$ .
- La matrice de passage est  $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix}$
- $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{P} = \mathbf{J} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$

# Typologie des systèmes planaires

2 valeurs propres complexes conjuguées

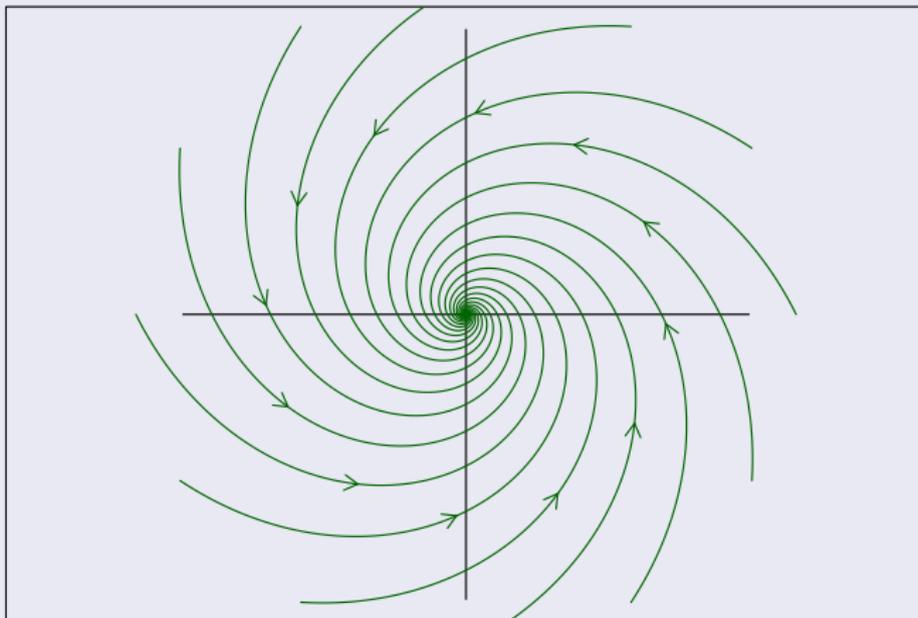
$\alpha > 0$  Foyer instable



# Typologie des systèmes planaires

2 valeurs propres complexes conjuguées

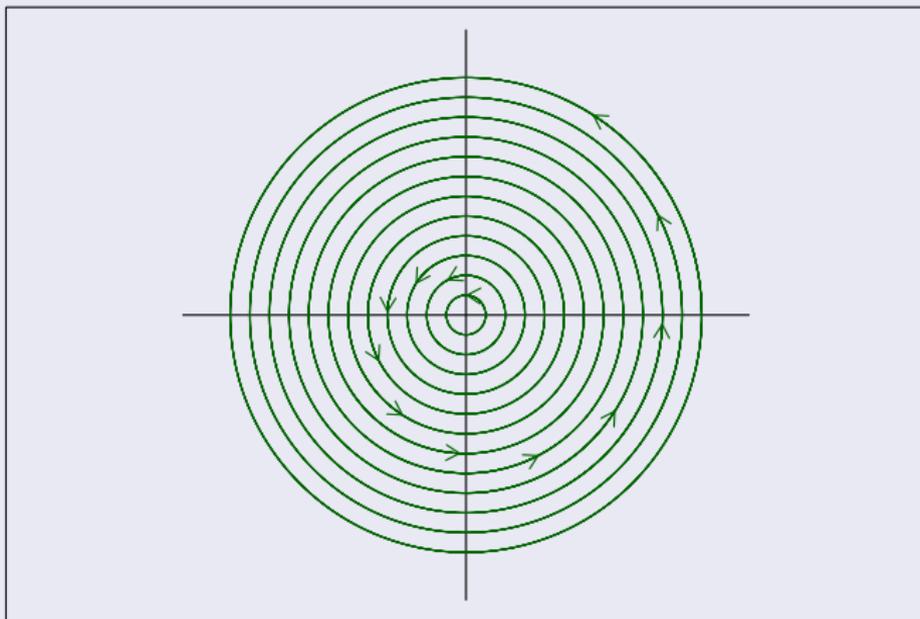
$\alpha < 0$  Foyer stable



# Typologie des systèmes planaires

2 valeurs propres complexes conjuguées

$\alpha = 0$  Centre



# Plan détaillé

- 2 Les systèmes planaires dans  $\mathbb{R}^2$ 
  - Définitions
  - Solutions des systèmes d'EDO linéaires (cas de 2 valeurs propres réelles)
  - Exponentielles de matrices et formes de Jordan
  - Typologie des systèmes planaires
  - Synthèse

# Typologie des systèmes planaires : synthèse

Soit un système planaire du type

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = a_{11}u + a_{12}v \\ \frac{dv}{dt} = a_{21}u + a_{22}v \end{cases}$$

Ce système est équivalent au système  $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{M}\mathbf{X}$ , où  $\mathbf{M}$  est la matrice Jacobienne du système définie par

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

# Typologie des systèmes planaires : synthèse

Le type de point d'équilibre du système dépend du nombre, du type (complexe ou réel), et du signe de la partie réelle, des valeurs propres de la matrice Jacobienne du système  $\mathbf{M}$ . Ces valeurs propres sont solutions de l'équation caractéristique de  $\mathbf{M}$ ,

$$\lambda^2 - \text{tr}(\mathbf{M})\lambda + \det(\mathbf{M}) = 0.$$

On distingue plusieurs cas selon le signe de

$$\Delta = (\text{tr}(\mathbf{M}))^2 - 4\det(\mathbf{M}).$$

# Typologie des systèmes planaires : synthèse

Cas  $\Delta > 0$ .

Les valeurs propres de  $\mathbf{M}$  sont

$$\lambda_{1,2} = \frac{\operatorname{tr}(\mathbf{M}) \pm \sqrt{(\operatorname{tr}(\mathbf{M}))^2 - 4\det(\mathbf{M})}}{2}$$

- Si  $\det(\mathbf{M}) > 0$ , alors  $\sqrt{(\operatorname{tr}(\mathbf{M}))^2 - 4\det(\mathbf{M})} < |\operatorname{tr}(\mathbf{M})|$  et  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont du signe de  $\operatorname{tr}(\mathbf{M})$ . Le point d'équilibre est un nœud stable ou instable.
- Si  $\det(\mathbf{M}) < 0$ , alors  $\sqrt{(\operatorname{tr}(\mathbf{M}))^2 - 4\det(\mathbf{M})} > |\operatorname{tr}(\mathbf{M})|$  et  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont de signes opposés. Le point d'équilibre est un point selle.

# Typologie des systèmes planaires : synthèse

Cas  $\Delta = 0$ .

$\mathbf{M}$  possède une valeur propre double

$$\lambda_0 = \frac{\text{tr}(\mathbf{M})}{2}$$

- Si  $\mathbf{M}$  est diagonale, le point d'équilibre est une étoile stable ou instable selon le signe de  $\text{tr}(\mathbf{M})$ .
- Si  $\mathbf{M}$  n'est pas diagonale, le point d'équilibre est un nœud dégénéré stable ou instable selon le signe de  $\text{tr}(\mathbf{M})$ .

# Typologie des systèmes planaires : synthèse

Cas  $\Delta < 0$ .

$\mathbf{M}$  possède deux valeurs propres complexes conjuguées

$$\lambda_{1,2} = \frac{\operatorname{tr}(\mathbf{M})}{2} \pm i \frac{\sqrt{|\operatorname{tr}(\mathbf{M})|^2 - 4\det(\mathbf{M})}}{2}$$

- Si  $\operatorname{tr}(\mathbf{M}) > 0$ , le point d'équilibre est un foyer instable.
- Si  $\operatorname{tr}(\mathbf{M}) < 0$ , le point d'équilibre est un foyer stable.
- Si  $\operatorname{tr}(\mathbf{M}) = 0$ , le point d'équilibre est un centre.

# Typologie des systèmes planaires : synthèse

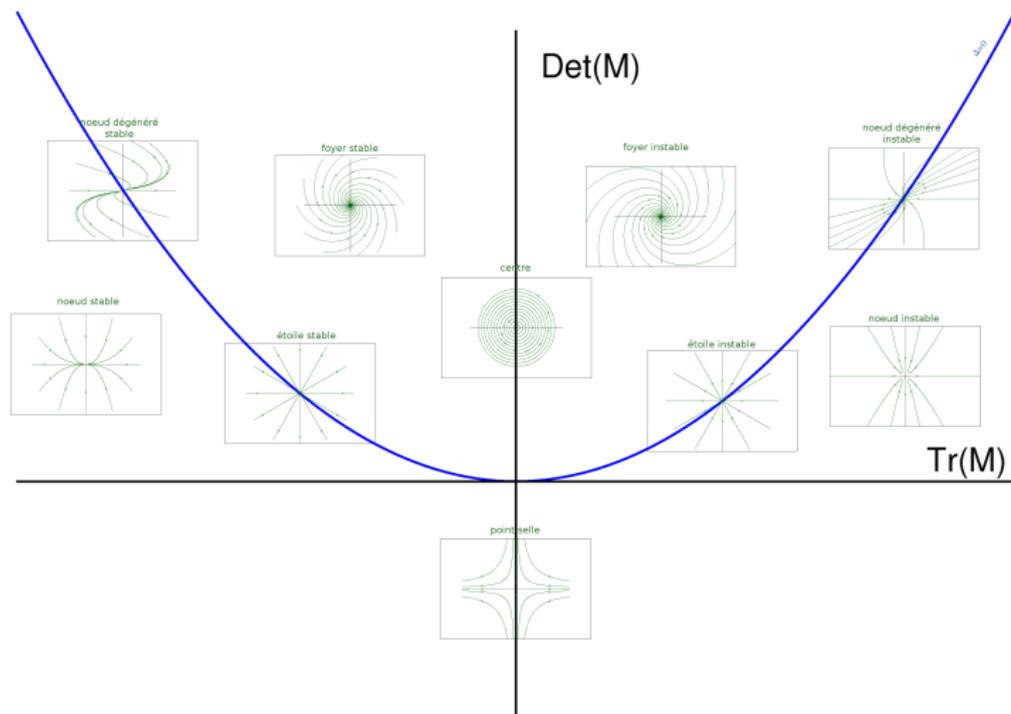
Dans le plan  $(\text{tr}(\mathbf{M}); \det(\mathbf{M}))$ , on peut représenter les régions d'apparition des différents types de points d'équilibre.

Le discriminant de l'équation caractéristique de la Jacobienne  $\mathbf{M}$  du système est :

$$\Delta = (\text{tr}(\mathbf{M}))^2 - 4\det(\mathbf{M}).$$

La parabole d'équation  $\det(\mathbf{M}) = \frac{(\text{tr}(\mathbf{M}))^2}{4}$  délimite les régions du plan où  $\Delta > 0$  (sous la parabole) et  $\Delta < 0$  (au dessus de la parabole).

## Typologie des systèmes planaires : synthèse



# Table des matières

- 1 Introduction : le modèle proies-prédateurs de Lotka-Volterra
- 2 Les systèmes planaires dans  $\mathbb{R}^2$
- 3 Étude qualitative des systèmes non linéaires dans  $\mathbb{R}^2$**
- 4 Exemples classiques
- 5 Pour aller plus loin

# Plan détaillé

- 3 Étude qualitative des systèmes non linéaires dans  $\mathbb{R}^2$ 
  - Exemple : le modèle proies-prédateurs de Lotka-Volterra
  - Isoclines et points d'équilibre
  - Jacobienne d'un système quelconque
  - Théorème de linéarisation

# Modèle proies-prédateurs de Lotka-Volterra

## Les équations du modèle

Les équations du modèle sont :

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K}\right) - \alpha NP \\ \frac{dP}{dt} = -\mu P + \beta NP \end{cases}$$

# Plan détaillé

- 3 Étude qualitative des systèmes non linéaires dans  $\mathbb{R}^2$ 
  - Exemple : le modèle proies-prédateurs de Lotka-Volterra
  - **Isoclines et points d'équilibre**
  - Jacobienne d'un système quelconque
  - Théorème de linéarisation

# Isoclines nulles

## Rappel

Soit un système dynamique d'EDO tel que

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = g(x, y) \end{cases}$$

Les isoclines nulles de ce systèmes sont l'ensemble des points du plan qui vérifient :

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y) = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{dy}{dt} = g(x, y) = 0$$

## Isoclines nulles

## exemple

Dans le modèle proposé, les isoclines verticales vérifient  $\frac{dN}{dt} = 0$

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} = 0 &\iff rN \left( 1 - \frac{N}{K} \right) - \alpha NP = 0 \\ &\iff N \left( r - \frac{rN}{K} - \alpha P \right) = 0 \\ &\iff N = 0 \\ &\quad \text{ou} \quad P = \frac{r(K - N)}{\alpha K} \end{aligned}$$

Il existe deux isoclines verticales d'équation  $N = 0$  et

$$P = \frac{r(K - N)}{\alpha K}.$$

# Isoclines nulles

## exemple

Dans le modèle proposé, les isoclines horizontales vérifient  $\frac{dP}{dt} = 0$

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} = 0 & \iff -\mu P + \beta NP = 0 \\ & \iff P(-\mu + \beta N) = 0 \\ & \iff P = 0 \\ & \text{ou } N = \frac{\mu}{\beta} \end{aligned}$$

Il existe deux isoclines horizontales d'équation  $P = 0$  et  $N = \frac{\mu}{\beta}$ .

# Définitions

## Point d'équilibre

Soit un système dynamique d'EDO tel que

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = g(x, y) \end{cases}$$

Un point d'équilibre de ce système est un point  $(x^*, y^*)$  qui vérifie :

$$\begin{cases} \left. \frac{dx}{dt} \right|_{x=x^*, y=y^*} = f(x^*, y^*) = 0 \\ \left. \frac{dy}{dt} \right|_{x=x^*, y=y^*} = g(x^*, y^*) = 0 \end{cases}$$

# Points d'équilibre

Les points d'équilibre sont à l'intersection des isoclines horizontales et verticales. Dans le modèle de proposé, il existe trois points d'équilibre :

$$\begin{array}{l}
 \mathbf{A}_0 \left\{ \begin{array}{l} N_0^* = 0 \\ p_0^* = 0 \end{array} \right. \\
 \mathbf{A}_1 \left\{ \begin{array}{l} P_1^* = 0 \\ P_1^* = \frac{r(K - N_1^*)}{\alpha K} \iff N_1^* = K \end{array} \right. \\
 \mathbf{A}_2 \left\{ \begin{array}{l} N_2^* = \frac{\mu}{\beta} \\ P_2^* = \frac{r(K - \frac{\mu}{\beta})}{\alpha K} \end{array} \right.
 \end{array}$$

Le point  $\mathbf{A}_2$  n'existe que si  $K > \frac{\mu}{\beta}$ .

# Étude du système au voisinage des points d'équilibre

## Changement de variable

Soit un système dynamique d'EDO tel que

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = g(x, y), \end{cases}$$

possédant un point d'équilibre  $(x^*, y^*)$ .

On introduit le changement de variable suivant :

$$\begin{cases} u = x - x^* \\ v = y - y^* \end{cases}$$

# Étude du système au voisinage des points d'équilibre

## Linéarisation au voisinage du point d'équilibre

On linéarise le système au voisinage du point d'équilibre en utilisant un développement de Taylor au premier ordre des fonctions  $f$  et  $g$

$$\begin{cases} \dot{u} = \dot{x} = f(x^*, y^*) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x^*, y^*)} (x - x^*) + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(x^*, y^*)} (y - y^*) \\ \dot{v} = \dot{y} = g(x^*, y^*) + \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{(x^*, y^*)} (x - x^*) + \left. \frac{\partial g}{\partial y} \right|_{(x^*, y^*)} (y - y^*) \end{cases}$$

soit,

$$\begin{cases} \dot{u} = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x^*, y^*)} u + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(x^*, y^*)} v \\ \dot{v} = \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{(x^*, y^*)} u + \left. \frac{\partial g}{\partial y} \right|_{(x^*, y^*)} v \end{cases}$$

# Plan détaillé

- 3 Étude qualitative des systèmes non linéaires dans  $\mathbb{R}^2$ 
  - Exemple : le modèle proies-prédateurs de Lotka-Volterra
  - Isoclines et points d'équilibre
  - **Jacobienne d'un système quelconque**
  - Théorème de linéarisation

# Jacobienne d'un système quelconque

Soit un système dynamique d'EDO tel que

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = g(x, y) \end{cases}$$

La matrice Jacobienne de ce système est définie par

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}$$

# Jacobienne d'un système quelconque

Exemple du modèle de Lotka-Volterra

Les équations du système sont

$$\begin{cases} \dot{N} = rN \left(1 - \frac{N}{K}\right) - \alpha NP \\ \dot{P} = -\mu P + \beta NP \end{cases}$$

La matrice Jacobienne de ce système est

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \dot{N}}{\partial N} & \frac{\partial \dot{N}}{\partial P} \\ \frac{\partial \dot{P}}{\partial N} & \frac{\partial \dot{P}}{\partial P} \end{pmatrix}$$

# Jacobienne d'un système quelconque

## Exemple du modèle de Lotka-Volterra

Les équations du système sont

$$\begin{cases} \dot{N} = rN \left(1 - \frac{N}{K}\right) - \alpha NP \\ \dot{P} = -\mu P + \beta NP \end{cases}$$

La matrice Jacobienne de ce système est

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} r - \alpha P - \frac{2rN}{K} & -\alpha N \\ \beta P & \beta N - \mu \end{pmatrix}$$

# Plan détaillé

- 3 Étude qualitative des systèmes non linéaires dans  $\mathbb{R}^2$ 
  - Exemple : le modèle proies-prédateurs de Lotka-Volterra
  - Isoclines et points d'équilibre
  - Jacobienne d'un système quelconque
  - Théorème de linéarisation

# Théorème de linéarisation

## Théorème de linéarisation

Soit un système non linéaire  $\dot{\mathbf{X}} = \Phi(\mathbf{X})$  admettant un point d'équilibre  $(x^*, y^*)$  et tel que  $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ , où  $\mathbf{A}$  est la matrice Jacobienne du système au point  $(x^*, y^*)$ . Alors, dans un voisinage du point d'équilibre, les portraits de phase du système  $\dot{\mathbf{X}} = \Phi(\mathbf{X})$  et de sa forme linéarisée  $\dot{\mathbf{U}} = \mathbf{A}\mathbf{U}$  sont qualitativement équivalents, sous réserve que le système linéarisé ne corresponde pas à des centres.

# Théorème de linéarisation

Application au modèle de Lotka et Volterra (cas  $K > \frac{\mu}{\beta}$ )

On se place dans le cas où il existe trois points d'équilibre  $K > \frac{\mu}{\beta}$ .  
La Jacobienne du système est :

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} r - \alpha P - \frac{2rN}{K} & -\alpha N \\ \beta P & \beta N - \mu \end{pmatrix}$$

Au point d'équilibre  $\mathbf{A}_0 = (0, 0)$ , la Jacobienne s'écrit

$$\mathbf{M}_{A_0} = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & -\mu \end{pmatrix}$$

On a  $\det(\mathbf{M}_{A_0}) = -r\mu < 0$  donc le point d'équilibre  $\mathbf{A}_0 = (0, 0)$  est un point selle.

# Théorème de linéarisation

Application au modèle de Lotka et Volterra

Au point d'équilibre  $\mathbf{A}_1 = (K, 0)$ , la Jacobienne s'écrit

$$\mathbf{M}_{A_1} = \begin{pmatrix} -r & -\alpha K \\ 0 & \beta K - \mu \end{pmatrix}$$

On a  $\det(\mathbf{M}_{A_1}) = -r(\beta K - \mu) < 0$  (car  $\beta K > \mu$ ) donc le point d'équilibre  $\mathbf{A}_1 = (K, 0)$  est un point selle.

# Théorème de linéarisation

Application au modèle de Lotka et Volterra

Au point d'équilibre  $\mathbf{A}_2 = \left(\frac{\mu}{\beta}, \frac{r(K-\frac{\mu}{\beta})}{\alpha K}\right)$ , la Jacobienne s'écrit

$$\mathbf{M}_{A_2} = \begin{pmatrix} -r\frac{N^*}{K} & -\alpha N^* \\ \beta P^* & 0 \end{pmatrix}$$

On a  $\det(\mathbf{M}_{A_2}) = \alpha\beta N^* P^* > 0$  et  $\text{tr}(\mathbf{M}_{A_2}) = -r\frac{N^*}{K} < 0$  donc le point d'équilibre  $\mathbf{A}_2$  est un nœud, un nœud dégénéré, ou un foyer stable selon le signe de  $\Delta = (\text{tr}(\mathbf{M}_{A_2}))^2 - 4\det(\mathbf{M}_{A_2})$ .

## Application au modèle de Lotka et Volterra

Étude du signe de  $\Delta$ 

$$\begin{aligned} \Delta &= (\operatorname{tr}(\mathbf{M}_{A_2}))^2 - 4\det(\mathbf{M}_{A_2}) \\ &= \left(\frac{r}{K}N^*\right)^2 - 4\alpha\beta N^*P^* \\ \iff \frac{\Delta}{N^*} &= \frac{r^2}{K^2}\frac{\mu}{\beta} - 4\alpha\beta\frac{r}{\alpha K}\left(K - \frac{\mu}{\beta}\right) \\ \iff \frac{K\Delta}{rN^*} &= r\frac{\mu}{K\beta} + 4(\mu - \beta K). \end{aligned}$$

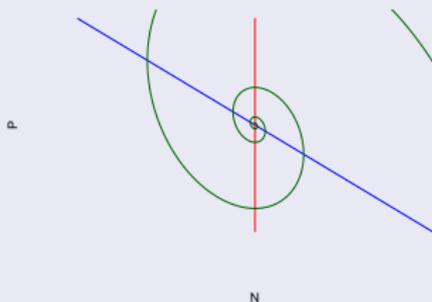
$\Delta$  est donc du signe de  $r\frac{\mu}{K\beta} + 4(\mu - \beta K)$ .

$$\Delta < 0 \iff r < \frac{4(\beta K - \mu)K\beta}{\mu}$$

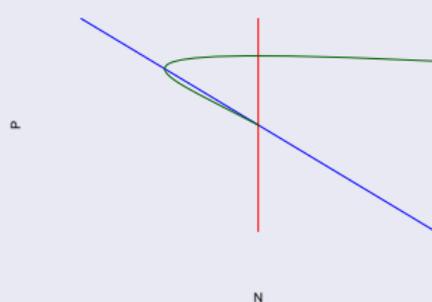
## Application au modèle de Lotka et Volterra

Portrait de phase au voisinage de  $A_2$ 

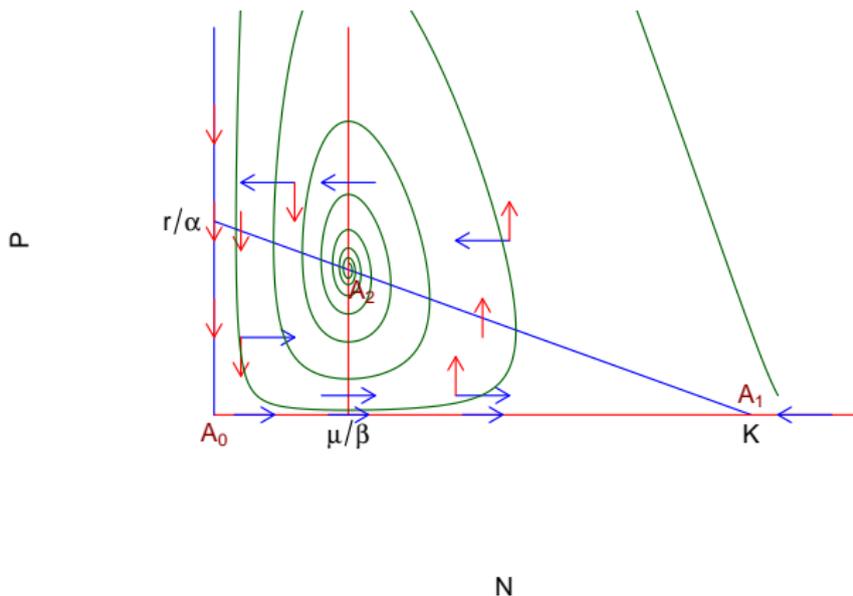
$$r < \frac{4(\beta K - \mu)K\beta}{\mu} \Rightarrow \text{foyer stable}$$



$$r > \frac{4(\beta K - \mu)K\beta}{\mu} \Rightarrow \text{nœud stable}$$

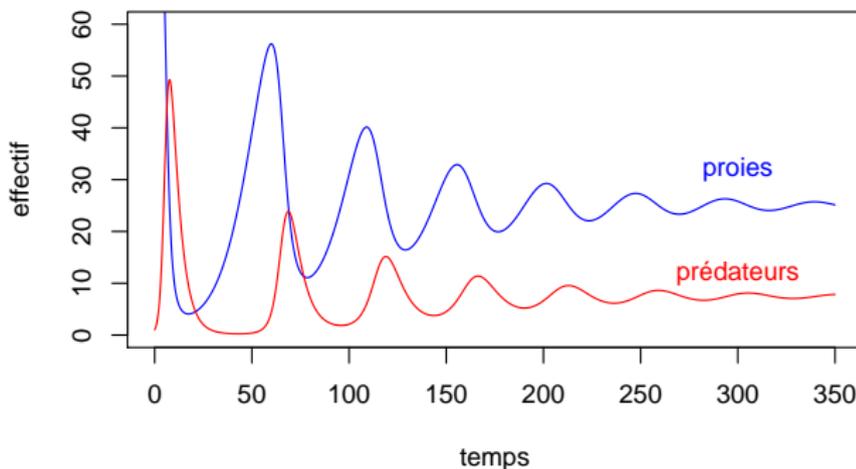


## Application au modèle de Lotka et Volterra

Portrait de phase (cas  $K > \frac{\mu}{\beta}$  et  $r < \frac{4(\beta K - \mu)K\beta}{\mu}$ )

# Application au modèle de Lotka et Volterra

Chroniques (cas  $K > \frac{\mu}{\beta}$  et  $r < \frac{4(\beta K - \mu)K\beta}{\mu}$ )



# Table des matières

- 1 Introduction : le modèle proies-prédateurs de Lotka-Volterra
- 2 Les systèmes planaires dans  $\mathbb{R}^2$
- 3 Étude qualitative des systèmes non linéaires dans  $\mathbb{R}^2$
- 4 Exemples classiques**
- 5 Pour aller plus loin

# Plan détaillé

## 4 Exemples classiques

- Le modèle de compétition interspécifique de Lotka-Volterra
- Le modèle épidémiologique SIR

# Modèle de compétition interspécifique

## Présentation du modèle

On modélise deux espèces 1 et 2 en compétition

- Croissance logistique en absence de compétition
- Chaque individu de l'espèce 2 gêne la croissance de l'espèce 1 comme  $\alpha$  individus de l'espèce 1.
- Chaque individu de l'espèce 1 gêne la croissance de l'espèce 2 comme  $\beta$  individus de l'espèce 2.

# Modèle de compétition interspécifique

## Les équations du modèle

Espèce 1

$$\frac{dN_1}{dt} = r_1 N_1 \left( 1 - \frac{N_1 + \alpha N_2}{K_1} \right)$$

Espèce 2

$$\frac{dN_2}{dt} = r_2 N_2 \left( 1 - \frac{N_2 + \beta N_1}{K_2} \right)$$

## Modèle de compétition interspécifique

Isoclines nulles : isoclines verticales  $\dot{N}_1 = 0$ On résoud  $\dot{N}_1 = 0$ 

$$\begin{aligned} & \frac{dN_1}{dt} = 0 \\ \iff r_1 N_1 \left( 1 - \frac{N_1 + \alpha N_2}{K_1} \right) &= 0 \\ \iff N_1 &= 0 \\ \text{ou} & \frac{N_1 + \alpha N_2}{K_1} = 1 \\ \iff N_1 + \alpha N_2 &= K_1 \\ \iff N_2 &= \frac{K_1 - N_1}{\alpha} \end{aligned}$$

Il y a deux isoclines verticales d'équation  $N_1 = 0$  et  $N_2 = \frac{K_1 - N_1}{\alpha}$ .

## Modèle de compétition interspécifique

Isoclines nulles : isoclines horizontales  $\dot{N}_2 = 0$ 

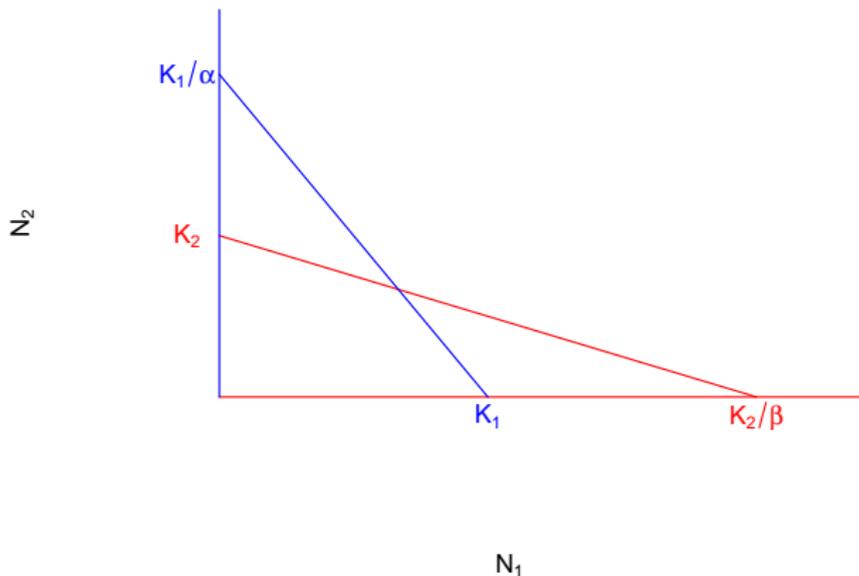
On raisonne par symétrie ( $N_1 \leftrightarrow N_2$ ,  $K_1 \leftrightarrow K_2$ ,  $r_1 \leftrightarrow r_2$  et  $\alpha \leftrightarrow \beta$ ).

$$\begin{aligned} & \frac{dN_2}{dt} = 0 \\ \iff & N_2 = 0 \\ \text{ou} & N_1 = \frac{K_2 - N_2}{\beta} \\ \iff & N_2 = K_2 - \beta N_1 \end{aligned}$$

Il y a deux isoclines horizontales d'équation  $N_2 = 0$  et  $N_2 = K_2 - \beta N_1$ .

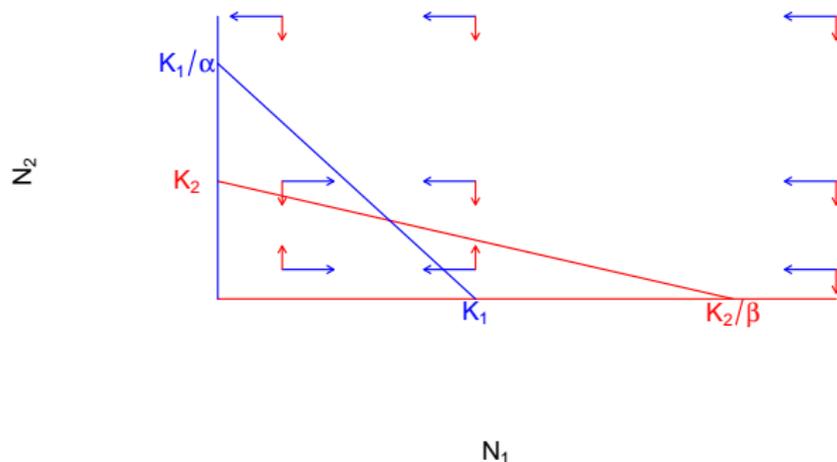
# Modèle de compétition interspécifique

## Portrait de phase



# Modèle de compétition interspécifique

Portrait de phase : directions des vecteurs vitesse



## Modèle de compétition interspécifique

## Points d'équilibre

Points d'équilibres sur l'isocline verticale  $N_1 = 0$

- $N_2 = 0$ , un point d'équilibre  $A_0 : (N_1^*_{(0)} = 0; N_2^*_{(0)} = 0)$ .
- $N_2 = K_2 - N_1$  un point d'équilibre  
 $A_1 : (N_1^*_{(1)} = 0; N_2^*_{(1)} = K_2)$ .

Points d'équilibres sur l'isocline verticale  $N_2 = \frac{K_1 - N_1}{\alpha}$

- $N_2 = 0$ , un point d'équilibre  $A_2 : (N_1^*_{(2)} = K_1; N_2^*_{(2)} = 0)$ .
- $N_2 = K_2 - \beta N_1$  un point d'équilibre  
 $A_3 : (N_1^*_{(3)} = \frac{K_1 - \alpha K_2}{1 - \alpha\beta}; N_2^*_{(3)} = \frac{K_2 - \beta K_1}{1 - \alpha\beta})$

## Modèle de compétition interspécifique

## Points d'équilibre

Il y a quatre points d'équilibre

- $A_0 : (N_1^*(0) = 0; N_2^*(0) = 0)$ .
- $A_1 : (N_1^*(1) = 0; N_2^*(1) = K_2)$ .
- $A_2 : (N_1^*(2) = K_1; N_2^*(2) = 0)$ .
- $A_3 : (N_1^*(3) = \frac{K_1 - \alpha K_2}{1 - \alpha\beta}; N_2^*(3) = \frac{K_2 - \beta K_1}{1 - \alpha\beta})$

Conditions d'existence du point d'équilibre  $A_3$

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 - \alpha\beta > 0 \\ \frac{K_1}{K_2} > \alpha \\ \frac{K_2}{K_1} > \beta \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{l} 1 - \alpha\beta < 0 \\ \frac{K_1}{K_2} < \alpha \\ \frac{K_2}{K_1} < \beta \end{array} \right.$$

# Modèle de compétition interspécifique

## Matrice Jacobienne

La matrice Jacobienne du système est

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} r_1 \left( 1 - \frac{2N_1 + \alpha N_2}{K_1} \right) & -\frac{\alpha r_1}{K_1} N_1 \\ -\frac{\beta r_2}{K_2} N_2 & r_2 \left( 1 - \frac{2N_2 + \beta N_1}{K_2} \right) \end{pmatrix}$$

# Modèle de compétition interspécifique

## Stabilité des points d'équilibre

Au point d'équilibre  $A_0 : (N_1^*_{(0)} = 0; N_2^*_{(0)} = 0)$ , la matrice Jacobienne s'écrit

$$\mathbf{M}_0 = \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix}$$

$A_0$  est un nœud instable.

## Modèle de compétition interspécifique

## Stabilité des points d'équilibre

Au point d'équilibre  $A_1 : (N_1^* = 0; N_2^* = K_2)$ , la matrice Jacobienne s'écrit

$$\mathbf{M}_1 = \begin{pmatrix} r_1 \left( 1 - \alpha \frac{K_2}{K_1} \right) & 0 \\ -\beta r_2 & -r_2 \end{pmatrix}$$

- Si  $\frac{K_1}{\alpha} < K_2$ , alors  $\det(\mathbf{M}_1) > 0$  et  $\text{tr}(\mathbf{M}_1) < 0$ ,  $A_1$  est donc un point d'équilibre stable.
- Si  $\frac{K_1}{\alpha} > K_2$ , alors  $\det(\mathbf{M}_1) < 0$ ,  $A_1$  est donc un point selle.

# Modèle de compétition interspécifique

## Stabilité des points d'équilibre

Au point d'équilibre  $A_2 : (N_1^*_{(2)} = K_1; N_2^*_{(2)} = 0)$ , on raisonne par symétrie

$$\mathbf{M}_2 = \begin{pmatrix} -r_1 & -\alpha r_1 \\ 0 & r_2 \left(1 - \beta \frac{K_1}{K_2}\right) \end{pmatrix}$$

- Si  $\frac{K_2}{\beta} < K_1$ , alors  $\det(\mathbf{M}_2) > 0$  et  $\text{tr}(\mathbf{M}_2) < 0$ ,  $A_2$  est donc un point d'équilibre stable.
- Si  $\frac{K_2}{\beta} > K_1$ , alors  $\det(\mathbf{M}_2) < 0$ ,  $A_2$  est donc un point selle.

## Modèle de compétition interspécifique

## Stabilité des points d'équilibre

Au point d'équilibre  $A_3 : (N_1^*(3) = \frac{K_1 - \alpha K_2}{1 - \alpha\beta}; N_2^*(3) = \frac{K_2 - \beta K_1}{1 - \alpha\beta})$ , la matrice Jacobienne s'écrit :

$$\mathbf{M}_3 = \begin{pmatrix} r_1 \left( 1 - \frac{2N_1^*(3) + \alpha N_2^*(3)}{K_1} \right) & -\frac{\alpha r_1 N_1^*(3)}{K_1} \\ -\frac{\beta r_2 N_2^*(3)}{K_2} & r_2 \left( 1 - \frac{2N_2^*(3) + \beta N_1^*(3)}{K_2} \right) \end{pmatrix}$$

# Modèle de compétition interspécifique

## Stabilité des points d'équilibre

Au point d'équilibre  $A_3 : (N_1^*(3) = \frac{K_1 - \alpha K_2}{1 - \alpha\beta}; N_2^*(3) = \frac{K_2 - \beta K_1}{1 - \alpha\beta})$ , la matrice Jacobienne s'écrit :

$$M_3 = \begin{pmatrix} -\frac{r_1 N_1^*(3)}{K_1} & -\frac{\alpha r_1 N_1^*(3)}{K_1} \\ -\frac{\beta r_2 N_2^*(3)}{K_2} & -\frac{r_2 N_2^*(3)}{K_2} \end{pmatrix}$$

## Modèle de compétition interspécifique

## Stabilité des points d'équilibre

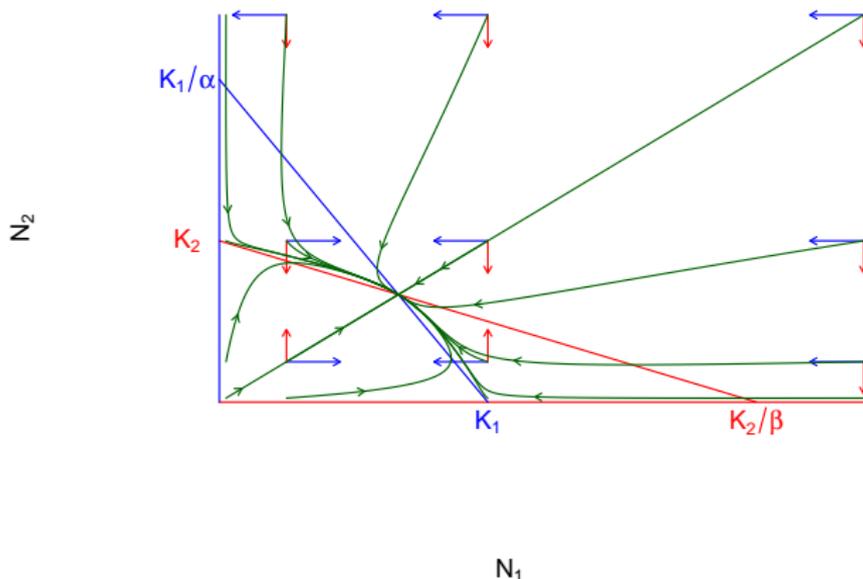
$$\det(\mathbf{M}_3) = (1 - \alpha\beta) \frac{r_1 r_2 N_1^*(3) N_2^*(3)}{K_1 K_2} \text{ est du signe de } (1 - \alpha\beta).$$

$$\text{tr}(\mathbf{M}_3) = -\frac{r_1 N_1^*(3)}{K_1} - \frac{r_2 N_2^*(3)}{K_2} < 0$$

- Si  $(1 - \alpha\beta) < 0$ , alors  $A_3$  est un point selle.
- Si  $(1 - \alpha\beta) > 0$ , alors  $A_3$  est un point d'équilibre stable.

# Modèle de compétition interspécifique

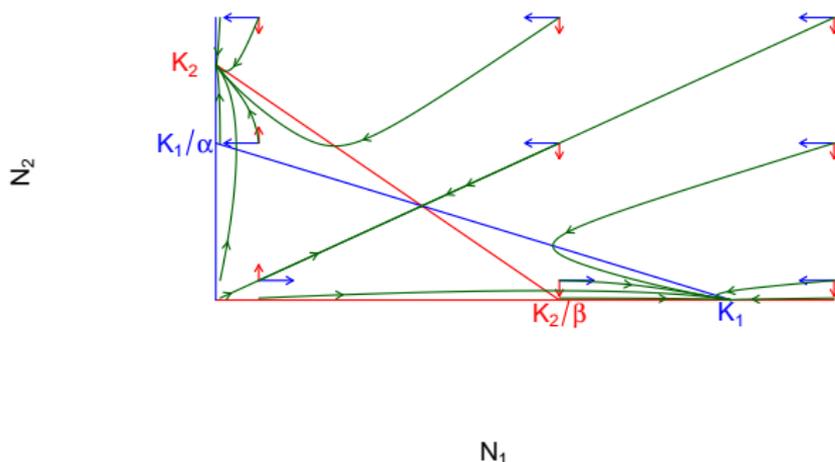
Portrait de phase : cas où  $A_3$  existe et  $1 - \alpha\beta > 0$



Il y a coexistence des deux espèces.

# Modèle de compétition interspécifique

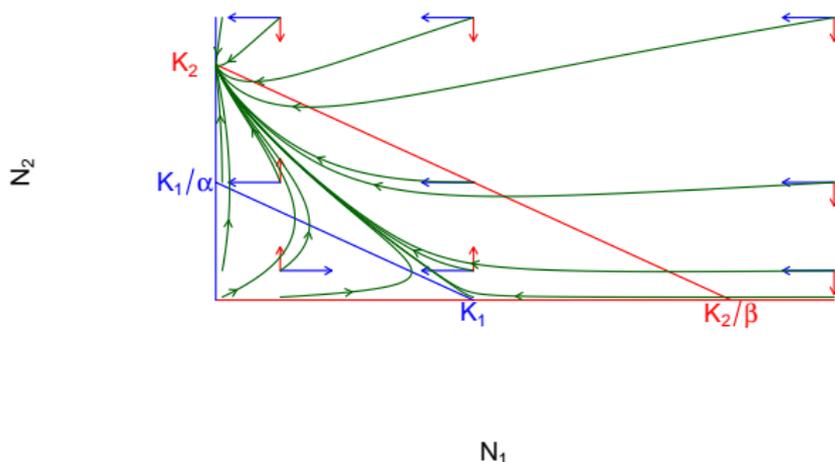
Portrait de phase : cas où  $A_3$  existe et  $1 - \alpha\beta < 0$



Il y a exclusion mutuelle.

# Modèle de compétition interspécifique

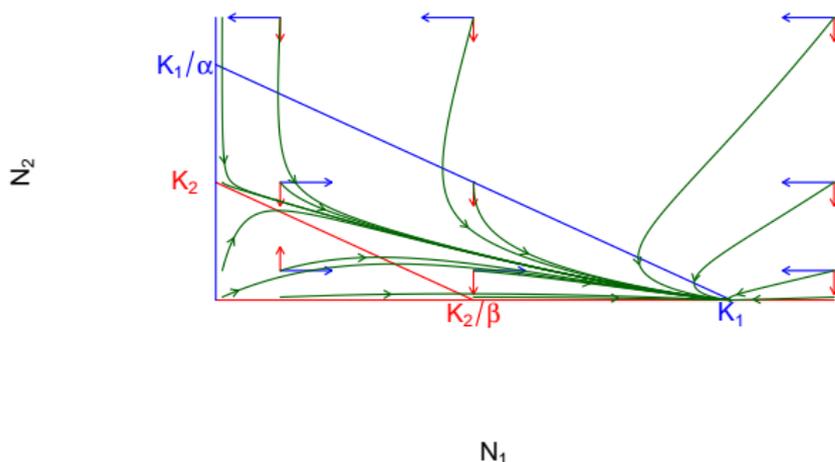
Portrait de phase : cas où  $A_{33}$  n'existe pas et  $K_2 > K_1/\alpha$



L'espèce 2 exclut l'espèce 1.

# Modèle de compétition interspécifique

Portrait de phase : cas où  $A_3$  n'existe pas et  $K_1 > K_2/\beta$



L'espèce 1 exclut l'espèce 2.

# Plan détaillé

- 4 Exemples classiques
  - Le modèle de compétition interspécifique de Lotka-Volterra
  - Le modèle épidémiologique SIR

# Le modèle épidémiologique SIR

## Présentation du modèle

Ce modèle distingue trois classes d'individus selon leur susceptibilité vis-à-vis d'une maladie contagieuse.

- Les individus susceptibles  $S$  sont sains et peuvent être contaminés.
- Les individus infectés  $I$  peuvent contaminer les individus susceptibles.
- Les individus immunisés  $R$  ont été infectés et sont immunisés quelques temps contre la maladie. Ils redeviennent ensuite susceptibles.

# Le modèle épidémiologique SIR

## Équations du modèle

Les équations du modèle sont

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS}{dt} = -\beta IS + \gamma R \\ \frac{dI}{dt} = \beta IS - \nu I \\ \frac{dR}{dt} = \nu I - \gamma R \end{array} \right.$$

# Le modèle épidémiologique SIR

## Interprétation biologique

- $\beta IS$  est le terme d'interaction entre les individus susceptibles et les individus infectés. C'est la quantité d'individus susceptibles devenant infectés par unité de temps  $dt$ .
- $\nu I$  est la quantité d'individus infectés qui guérissent par unité de temps  $dt$ .
- $\gamma R$  est la quantité d'individus immunisés qui perdent leur immunité par unité de temps  $dt$ .

# Le modèle épidémiologique SIR

## Points d'équilibre

Si on note  $N = S + I + R$ , on a

$$\frac{dN}{dt} = \frac{dS}{dt} + \frac{dI}{dt} + \frac{dR}{dt} = \beta IS - \beta IS + \gamma R - \gamma R + \nu I - \nu I = 0$$

$\frac{dN}{dt} = 0 \iff N = N_0$ , on peut donc réduire ce système à un système à deux dimensions  $S$  et  $I$ , on aura à tout instant  $R = N_0 - S - I$ .

## Le modèle épidémiologique SIR

## Points d'équilibre

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS}{dt} = 0 \\ \frac{dI}{dt} = 0 \\ \frac{dR}{dt} = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} \gamma R = \beta IS \\ \nu I = \beta IS \\ \nu I = \gamma R \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} S = \frac{\gamma R}{\beta I} \\ I = 0 \quad \text{ou} \quad S = \frac{\nu}{\beta} \\ R = \frac{\nu}{\gamma} I \end{array} \right.$$

## Le modèle épidémiologique SIR

## Points d'équilibre

- $I_0^* = 0 \Rightarrow R_0^* = 0$  et  $S_0^* = N_0$ , tous les individus sont sains.
- $S_1^* = \frac{\nu}{\beta}$ ,  $I_1^* = N_0 - R_1^* - S_1^*$  et  $R_1^* = \frac{\nu}{\gamma} I_1^*$  donc

$$S_1^* = \frac{\nu}{\beta}$$

$$I_1^* = \frac{N_0 - \frac{\nu}{\beta}}{1 + \frac{\nu}{\gamma}} = \frac{\gamma(\beta N_0 - \nu)}{\beta(\gamma + \nu)}$$

$$R_1^* = \frac{N_0 - \frac{\nu}{\beta}}{1 + \frac{\gamma}{\nu}} = \frac{\nu(\beta N_0 - \nu)}{\beta(\gamma + \nu)}$$

Ce point n'existe que si  $N_0 > \frac{\nu}{\beta}$

## Le modèle épidémiologique SIR

Isoclines nulles

En utilisant la relation  $N_0 = S + I + R$ ,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS}{dt} = -\beta IS + \gamma R \\ \frac{dI}{dt} = \beta IS - \nu I \\ \frac{dR}{dt} = \nu I - \gamma R \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{dS}{dt} = \gamma(N_0 - I) - (\beta I + \gamma)S \\ \frac{dI}{dt} = \beta IS - \nu I \end{array} \right.$$

## Le modèle épidémiologique SIR

Isoclines nulles

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS}{dt} = 0 \\ \frac{dI}{dt} = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} \gamma(N_0 - I) - (\beta I + \gamma)S = 0 \\ I(\beta S - \nu) = 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} S = \frac{\gamma(N_0 - I)}{\beta I + \gamma} \\ I = 0 \quad \text{ou} \quad S = \frac{\nu}{\beta} \end{array} \right.$$

# Le modèle épidémiologique SIR

Matrice Jacobienne du système

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \gamma(N_0 - I) - (\beta I + \gamma)S \\ \frac{dI}{dt} = \beta IS - \nu I \end{cases} \Rightarrow \mathbf{M} = \begin{pmatrix} -\beta I - \gamma & -\beta S - \gamma \\ \beta I & \beta S - \nu \end{pmatrix}$$

# Le modèle épidémiologique SIR

## Stabilité des points d'équilibre

Au point  $(S_0^* = N_0; I_0^* = 0)$ , la Jacobienne s'écrit

$$\mathbf{M}_0 = \begin{pmatrix} -\gamma & -\beta N_0 - \gamma \\ 0 & \beta N_0 - \nu \end{pmatrix}$$

$\text{tr}(\mathbf{M}_0) = -\gamma + \beta N_0 - \nu$  et  $\det(\mathbf{M}_0) = -\gamma(\beta N_0 - \nu)$

$$N_0 > \frac{\nu}{\beta}$$

$$\det(\mathbf{M}_0) < 0$$

$\Rightarrow (S_0^*; I_0^*)$  est un point selle.

$$N_0 < \frac{\nu}{\beta}$$

$\det(\mathbf{M}_0) > 0$  et  $\text{tr}(\mathbf{M}_0) < 0$

$$\Delta = (-\gamma + \beta N_0 - \nu)^2 + 4\gamma(\beta N_0 - \nu)$$

$$= (-\gamma - \beta N_0 + \nu)^2 > 0$$

$\Rightarrow (S_0^*; I_0^*)$  est un nœud stable.

## Le modèle épidémiologique SIR

Stabilité des points d'équilibre

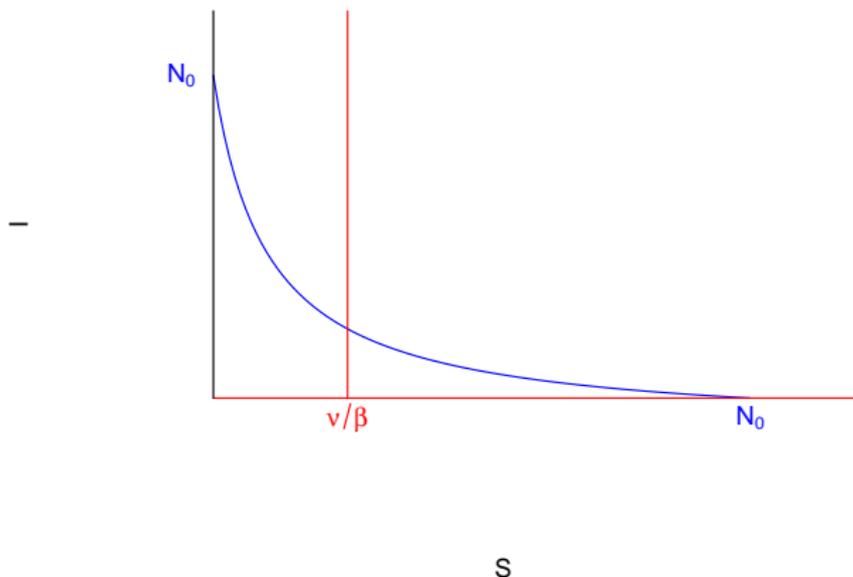
Au point  $\left( S_1^* = \frac{\nu}{\beta}; I_1^* = \frac{\gamma(\beta N_0 - \nu)}{\beta(\gamma + \nu)} \right)$ , la Jacobienne s'écrit

$$\mathbf{M}_1 = \begin{pmatrix} -\beta I_1^* - \gamma & -\beta S_1^* - \gamma \\ \beta I_1^* & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{tr}(\mathbf{M}_1) = -\beta I_1^* - \gamma < 0 \\ \det(\mathbf{M}_1) = \beta I_1^*(\beta S_1^* + \gamma) > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (S_1^*; I_1^*) \text{ est stable.}$$

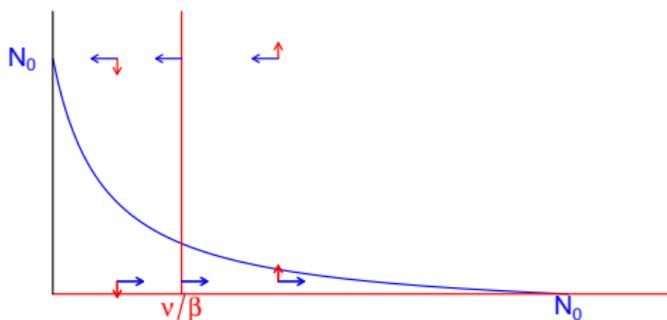
# Le modèle épidémiologique SIR

Portrait de phase,  $N_0 > \frac{\nu}{\beta}$



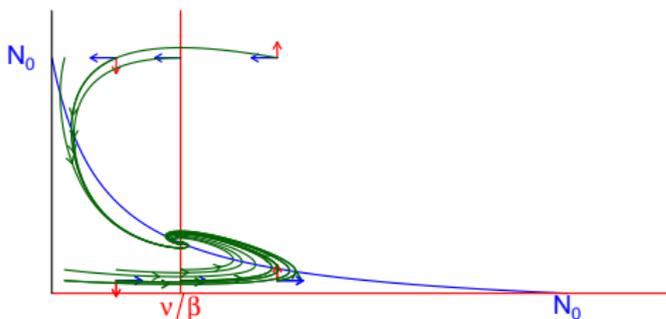
# Le modèle épidémiologique SIR

Portrait de phase,  $N_0 > \frac{\nu}{\beta}$ , directions des vecteurs vitesse

 $S$

# Le modèle épidémiologique SIR

Portrait de phase,  $N_0 > \frac{\nu}{\beta}$ , trajectoires

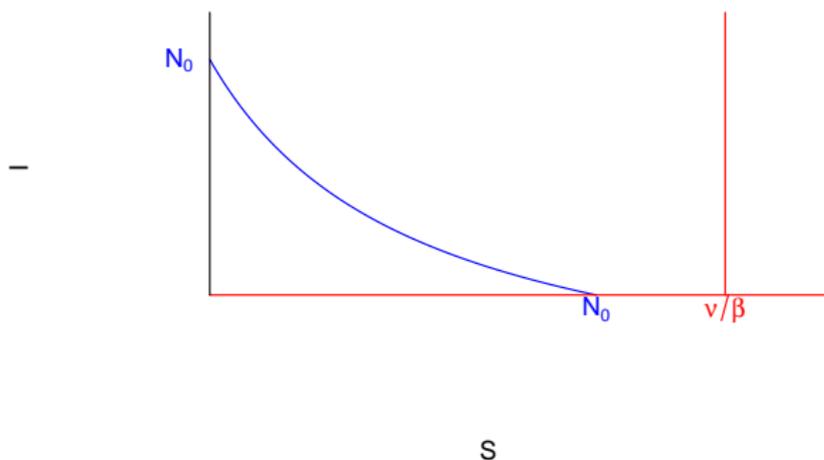


S

À l'équilibre  $I_1^* > 0$ ,  $S_1^* = \frac{\nu}{\beta}$  et  $R_1^* = N_0 - I_1^* - S_1^*$ .

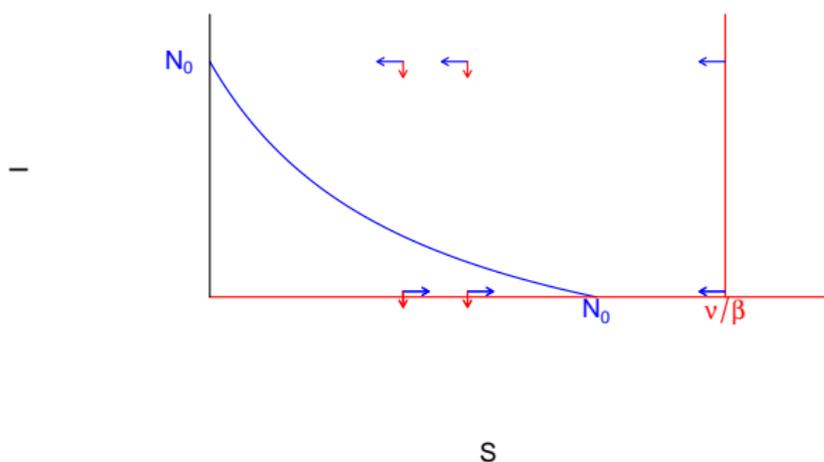
# Le modèle épidémiologique SIR

Portrait de phase,  $N_0 < \frac{\nu}{\beta}$



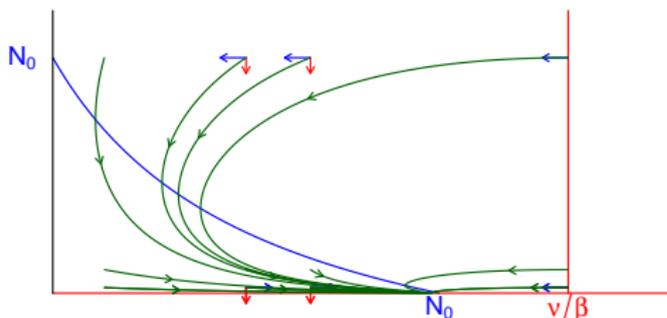
# Le modèle épidémiologique SIR

Portrait de phase,  $N_0 < \frac{\nu}{\beta}$ , directions des vecteurs vitesse



# Le modèle épidémiologique SIR

Portrait de phase,  $N_0 < \frac{\nu}{\beta}$ , trajectoires



S

L'infection ne se maintient pas dans la population.

# Table des matières

- 1 Introduction : le modèle proies-prédateurs de Lotka-Volterra
- 2 Les systèmes planaires dans  $\mathbb{R}^2$
- 3 Étude qualitative des systèmes non linéaires dans  $\mathbb{R}^2$
- 4 Exemples classiques
- 5 Pour aller plus loin**

# Plan détaillé

## 5 Pour aller plus loin

- Le modèle proie prédateur de Lotka et Volterra, avec croissance exponentielle des proies
- La notion d'intégrale première
- Suggestion de lecture

# Le modèle proie-prédateur

Avec une croissance exponentielle des proies

Les équations du modèle sont

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = rN - \alpha NP \\ \frac{dP}{dt} = -\mu P + \beta NP \end{cases}$$

# Isoclines nulles

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dN}{dt} = rN - \alpha NP \\ \frac{dP}{dt} = -\mu P + \beta NP \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} \frac{dN}{dt} = 0 \\ N(r - \alpha P) = 0 \\ N = 0 \\ \text{ou } P = \frac{r}{\alpha} \end{array}$$

## Isoclines nulles

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dN}{dt} = rN - \alpha NP \\ \frac{dP}{dt} = -\mu P + \beta NP \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \frac{dP}{dt} = 0 \\ \Leftrightarrow P(-\mu + \beta N) = 0 \\ \Leftrightarrow P = 0 \\ \text{ou } N = \frac{\mu}{\beta} \end{array}$$

# Points d'équilibre

Les points d'équilibre sont à l'intersection des isoclines nulles.

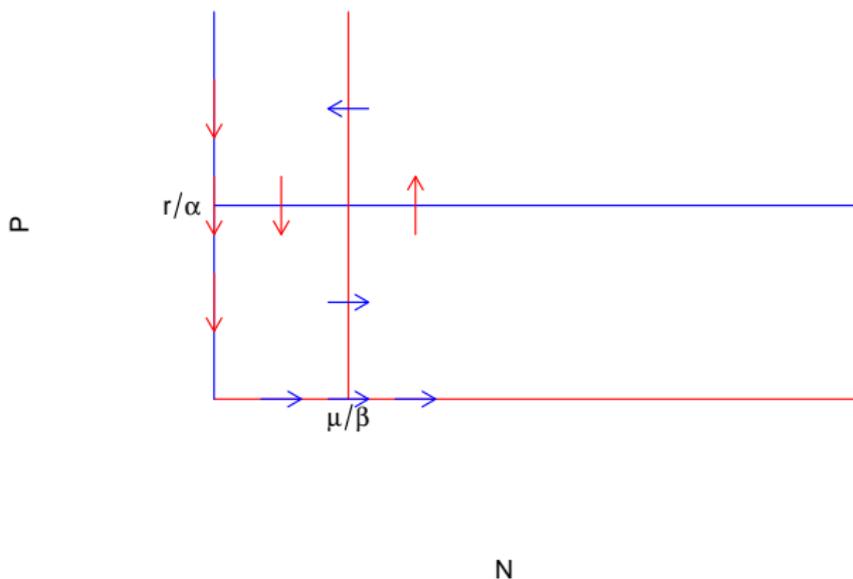
$$\left\{ \begin{array}{l} N = 0 \\ P = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} N = \frac{\mu}{\beta} \\ P = \frac{r}{\alpha} \end{array} \right.$$

Pour aller plus loin

Le modèle proie prédateur de Lotka et Volterra, avec croissance exponentielle des proies

# Portrait de phase

Vecteurs vitesse



# Matrice Jacobienne du système

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = rN - \alpha NP \\ \frac{dP}{dt} = -\mu P + \beta NP \end{cases} \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} r - \alpha P & -\alpha N \\ \beta P & -\mu + \beta N \end{pmatrix}$$

# Matrice Jacobienne du système

Au point d'équilibre  $N = 0, P = 0$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} r - \alpha P & -\alpha N \\ \beta P & -\mu + \beta N \end{pmatrix} \qquad \mathbf{M}_{0,0} = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & -\mu \end{pmatrix}$$

$\det(\mathbf{M}) < 0 \Rightarrow$  le point  $(0, 0)$  est un point selle.

Le modèle proie prédateur de Lotka et Volterra, avec croissance exponentielle des proies

## Matrice Jacobienne du système

Au point d'équilibre  $N^* = \frac{\mu}{\beta}$ ,  $P^* = \frac{r}{\alpha}$ 

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} r - \alpha P & -\alpha N \\ \beta P & -\mu + \beta N \end{pmatrix} \quad \mathbf{M}_{N^*, P^*} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha N^* \\ \beta P^* & 0 \end{pmatrix}$$

$\det(\mathbf{M}) = \alpha\beta N^* P^* > 0$  et  $\text{tr}(\mathbf{M}) = 0 \Rightarrow$  la linéarisation prévoit des centres.

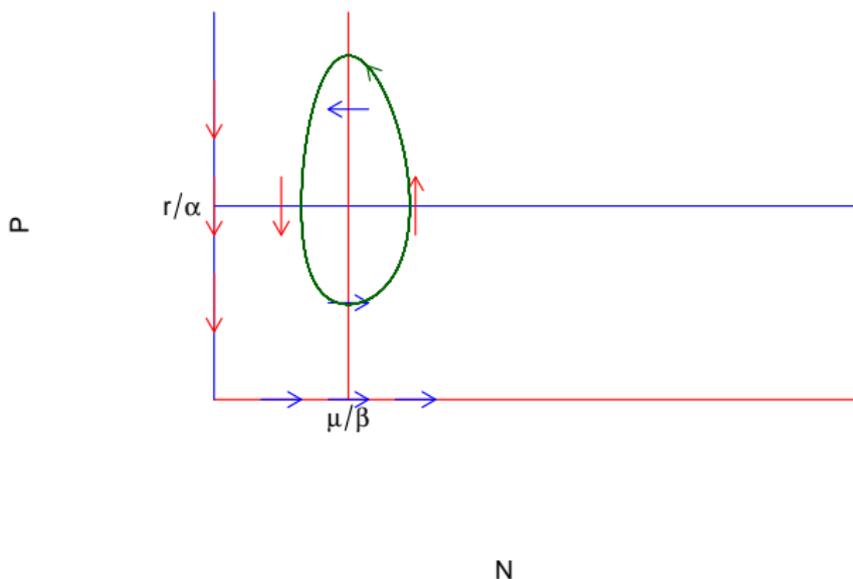
Le théorème de linéarisation ne peut pas s'appliquer.

Pour aller plus loin

Le modèle proie prédateur de Lotka et Volterra, avec croissance exponentielle des proies

# Évolution du système

Le point d'équilibre non trivial est un centre



# Plan détaillé

## 5 Pour aller plus loin

- Le modèle proie prédateur de Lotka et Volterra, avec croissance exponentielle des proies
- La notion d'intégrale première
- Suggestion de lecture

## Intégrale première

Les solutions  $(N(t), P(t))$  du système vérifient

$$\left. \begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= rN - \alpha NP \\ \frac{dP}{dt} &= -\mu P + \beta NP \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{dN}{dP} = \frac{(r - \alpha P)N}{(\beta N - \mu)P}$$

$$\Rightarrow \frac{\beta N - \mu}{N} dN = \frac{r - \alpha P}{P} dP$$

$$\Rightarrow \int \left(\beta - \frac{\mu}{N}\right) dN = \int \left(\frac{r}{P} - \alpha\right) dP$$

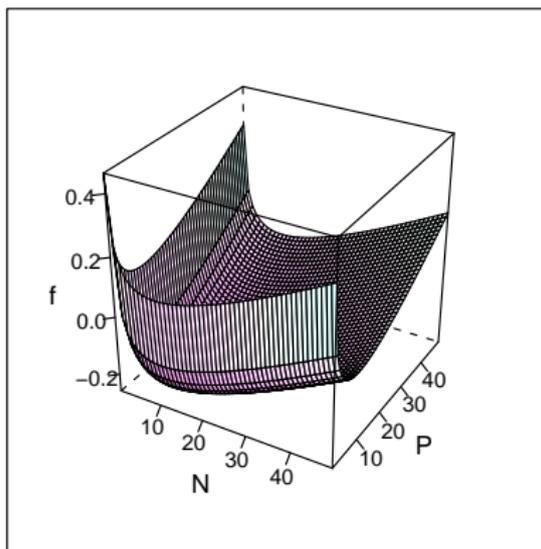
$$\Rightarrow \beta N - \mu \ln(N) + \alpha P - r \ln(P) = K$$

où  $K$  est une constante quelconque.

On note  $f(N, P) = \beta N - \mu \ln(N) + \alpha P - r \ln(P)$ .

# Graphe de la fonction $f$

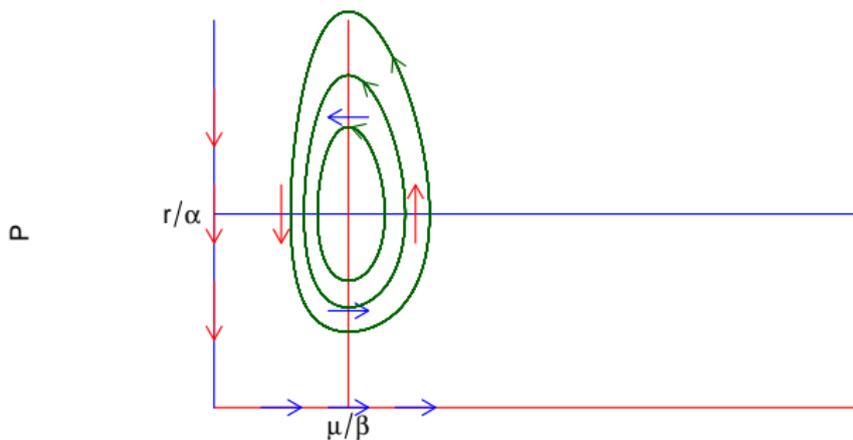
Pour  $r = \mu = 0.1$ , et  $\alpha = \beta = 0.01$



$f(N, P)$  admet un minimum en  $\left(N = \frac{\mu}{\beta}, P = \frac{r}{\alpha}\right)$

# Évolution du système

Les solutions suivent des courbes de niveau de  $f$



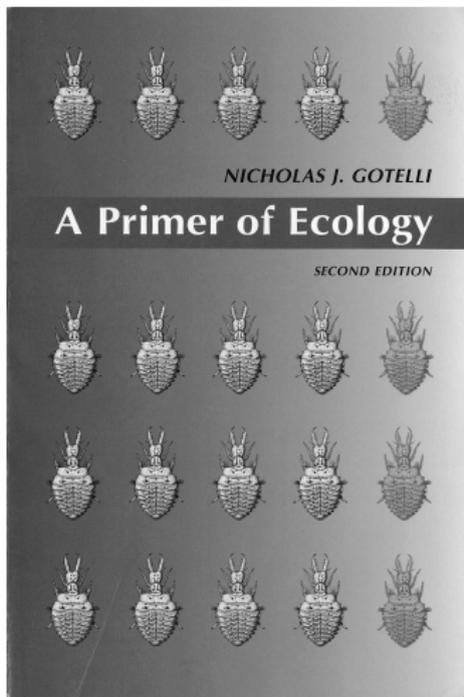
N

# Plan détaillé

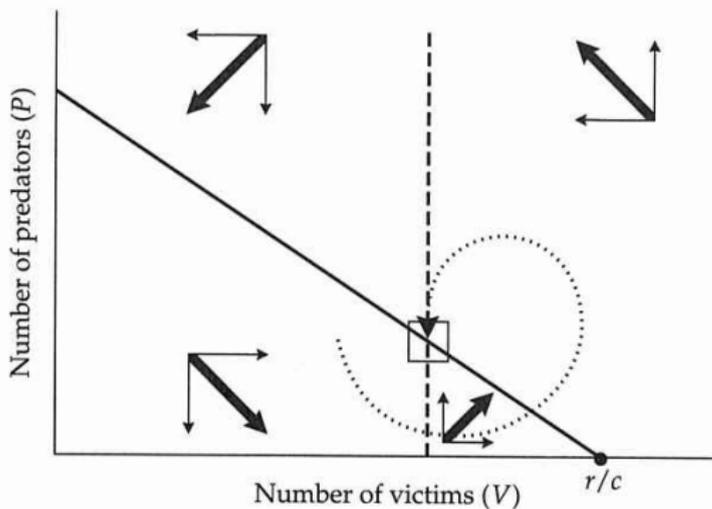
## 5 Pour aller plus loin

- Le modèle proie prédateur de Lotka et Volterra, avec croissance exponentielle des proies
- La notion d'intégrale première
- Suggestion de lecture

# Suggestion de lecture



# Suggestion de lecture



# Suggestion de lecture

