# Analyse des systèmes dynamiques dans $\mathbb{R}$

## Automne 2010

S. Mousset

Université Claude Bernard Lyon I – France

# Table des matières

# Les modèles linéaires

- Modèles les plus simples
- Une analyse quantitative complète est possible
- Une analyse qualitative permet de décrire le comportement du modèle.

# Plan détaillé

1. L'analyse des modèles linéaires
   - Le modèle de Malthus
   - Un modèle de diffusion

# Le modèle de Malthus (ou modèle exponentiel)

Le modèle de Malthus est l'un des premiers modèles de dynamique des populations. Les hypothèses de ce modèle sont les suivantes :

- On considère une population de taille $N(t)$.
- L'accroissement individuel de la population est constant quel que soit $N(t)$.

Comment la taille de la population évolue-t-elle au cours du temps.

# Les variables et les paramètres du modèle

## Les variables

$N(t)$ est la taille de la population.

## Les paramètres

$r$ est le "taux de croissance" intrinsèque de la population.

# Les équations du modèle

L'évolution la taille de la population vérifie :

$$dN = rNdt \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{dN}{dt} = rN$$

# Les solutions

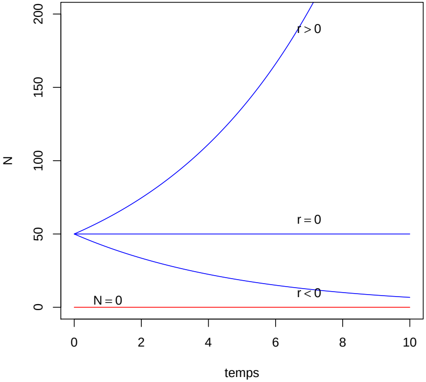
On résoud l'équation différentielle $\dfrac{dN}{dt} = rN$.

$$
\begin{aligned}
& \frac{dN}{dt} &=& \quad rN \\
\iff & \frac{dN}{N} &=& \quad rdt \\
\Rightarrow & \ln(N) &=& \quad rt + C \\
\iff & N &=& \ e^C e^{rt} \\
\Rightarrow & N(t) &=& \ N_0 e^{rt}
\end{aligned}
$$

# Représentation graphique des solutions : Chroniques

L'allure des solutions $N(t)$ varie selon le signe de $r$.

$$\dot{N} = rN$$



# Plan détaillé

1. L'analyse des modèles linéaires
   - Le modèle de Malthus
   - Un modèle de diffusion

# Diffusion d'un soluté à travers une membrane.

On réalise le modèle expérimental suivant :

- De l'eau pure dans un récipient.
- Un boudin à dialyse contenant une solution d'un colorant est plongé dans le récipient.

Comment la concentration en colorant évolue-t-elle dans le récipient ?

# Les variables et les paramètres du modèle

Les variables varient au cours du temps.

## Les variables

- La concentration $c_r(t)$ dans le récipient.
- La concentration $c_b(t)$ dans le boudin à dialyse.

# Les variables et les paramètres du modèle

## Les paramètres sont fixés pour une expérience donnée

Les paramètres peuvent éventuellement varier d'une expérience à l'autre.

### Les paramètres

- La concentration initiale de la solution $c_0$.
- Le volume de l'eau dans le récipient $V_r$.
- Le volume de la solution dans le boudin à dialyse $V_b$.
- La perméabilité de la membrane de dialyse au colorant $P$.
- La surface de la membrane constituant le boudin à dialyse $S$.

# Les équations du modèle

Pour simplifier, on considèrera $V_r = V_b = V$.
La conservation de la quantité de colorant impose

$$c_r V_r + c_b V_b = c_0 V_b \iff c_r + c_b = c_0 \iff c_b = c_0 - c_r$$

La variation de la concentration $c_r$ dans le récipient est proportionnelle à :

- la perméabilité de la membrane $P$ (donnée par unité de surface)
- la surface d'échange $S$
- la différence des concentrations $\Delta c = c_b - c_r = c_0 - 2c_r$

# Les équations du modèle

L'évolution de la concentration $c_r$ vérifie donc l'équation :

$$dc_r = (PS\Delta c)dt \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{dc_r}{dt} = PS(c_0 - 2c_r)$$

# Les solutions

L'équation différentielle à résoudre est :

$$\frac{dc_r}{dt} = PS(c_0 - 2c_r) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{dc_r}{dt} + 2PSc_r = PSc_0. \tag{1}$$

L'équation différentielle sans second membre est

$$\frac{dc_r}{dt} + 2PSc_r = 0. \tag{2}$$

Les solutions de l'équation 1 sont du type $c_r(t) = c_{\text{essm}}(t) + c_{\text{part}}(t)$, où $c_{\text{essm}}(t)$ est une solution de l'équation sans second membre (2) et $c_{\text{part}}(t)$ est une solution particulière de l'équation (1).

# Solution particulière de (1)

$$\frac{dc_r}{dt} + 2PSc_r = PSc_0.$$

$c_{\text{part}}(t) = \frac{c_0}{2}$ est une solution particulière évidente de (1).

# Solution générale de (2)

$$
\begin{array}{rlcl}
 & \frac{dc_r}{dt} + 2PSc_r & = & 0 \\
\iff & \frac{dc_r}{dt} & = & -2PSc_r \\
\iff & \frac{dc_r}{c_r} & = & -2PSdt \\
\iff & \int \frac{dc_r}{c_r} & = & \int -2PSdt \\
\iff & \ln c_r & = & -2PSt + K \\
 & & & \\
\iff & c_r(t) & = & Ce^{-2PSt}.
\end{array}
$$

$c_{\mathrm{essm}}(t) = Ce^{-2PSt}$ est une solution générale de (2).

# Solution du modèle

La solution générale du modèle est du type :

$$c_r(t) = \frac{c_0}{2} + Ce^{-2PSt}.$$

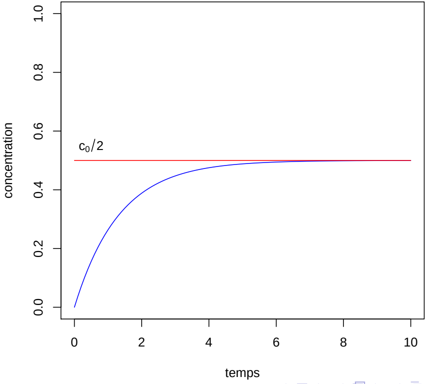
On cherche la solution remplissant la condition initiale $c_r(0) = 0$, donc $C = -\frac{c_0}{2}$.

$$c_r(t) = \frac{c_0}{2}\left(1 - e^{-2PSt}\right).$$

# Représentation graphique des solutions : Chroniques

La concentration évolue vers une concentration limite $\lim_{t \to \infty} c_r(t) = \frac{c_0}{2}$.

$$\dot{c} = PS(c_0 - 2c)$$



# Table des matières

# Plan détaillé

2. Un modèle non linéaire : le modèle logistique
   - Le modèle de Verhulst ou modèle logistique
   - Analyse quantitative du modèle logistique
   - Points singuliers
   - Portrait de phase, stabilité des points d'équilibre
   - Tracé des chroniques, points d'inflexion

# Le modèle de Verhulst ou modèle logistique

Le modèle de dynamique des populations de Malthus est insatisfaisant car :

- la croissance de la population ne dépend pas de sa taille
- il fait l'hypothèse de ressources illimitées
- il mène à l'extinction de la population ou à une explosion démographique.

Dans le modèle de Malthus, on a $r = b - d$ où $b$ est le taux de fécondité et $d$ le taux de mortalité par individu.

# Les équations du modèle

Les hypothèses du modèle :

- Le taux de fécondité par individu est constant : $b = b_0$.
- Le taux de mortalité par individu croît avec l'effectif : $d = d_0 + \delta N$.

Le taux de croissance intrinsèque de la population est $r = b - d = b_0 - d_0 - \delta N$. La variation de l'effectif $dN$ durant la différentielle de temps $dt$ est donc :

$$dN = (b_0 - d_0 - \delta N) N dt$$

# Les équations du modèle

$$\begin{aligned} dN &= (b_0 - d_0 - \delta N) N dt \\ \Longleftrightarrow \quad \frac{dN}{dt} &= \left((b_0 - d_0) N - \delta N^2\right) \\ \Longleftrightarrow \quad \frac{dN}{dt} &= (b_0 - d_0) N \left(1 - \frac{\delta N}{b_0 - d_0}\right) \end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right), \tag{3}$$

avec $r = b_0 - d_0$ et $K = \dfrac{r}{\delta}$.

# Plan détaillé

# Analyse quantitative du modèle logistique

$$
\begin{aligned}
& \frac{dN}{dt} && = rN\left(1-\frac{N}{K}\right) \\
\iff\quad & \frac{dN}{N\left(1-\frac{N}{K}\right)} && = rdt \\
\iff\quad & \frac{K}{N\left(K-N\right)}dN && = rdt \\
\iff\quad & \frac{K-N+N}{N\left(K-N\right)}dN && = rdt \\
\iff\quad & \left(\frac{1}{N}+\frac{1}{K-N}\right)dN && = rdt
\end{aligned}
$$

# Analyse quantitative du modèle logistique

$$
\begin{aligned}
& \left(\frac{1}{N}+\frac{1}{K-N}\right) dN && = && rdt \\
\Longleftrightarrow \quad & \int \left(\frac{1}{N}+\frac{1}{K-N}\right) dN && = && \int rdt \\
\Longleftrightarrow \quad & \ln N - \ln(K-N) && = && rt + C_1 \\
\Longleftrightarrow \quad & \ln\left(\frac{N}{K-N}\right) && = && rt + C_1 \\
\Longleftrightarrow \quad & \frac{N}{K-N} && = && C_2 e^{rt}
\end{aligned}
$$

# Analyse quantitative du modèle logistique

$$
\begin{array}{rlcl}
 & \dfrac{N}{K-N} & = & C_2 e^{rt} \\
\Longleftrightarrow & N & = & C_2 K e^{rt} - N C_2 e^{rt} \\
\Longleftrightarrow & N\left(1 + C_2 e^{rt}\right) & = & C_2 K e^{rt} \\
\Longleftrightarrow & N & = & \dfrac{C_2 K e^{rt}}{1 + C_2 e^{rt}} \\
\Longleftrightarrow & N & = & \dfrac{K C_2}{C_2 + e^{-rt}}
\end{array}
$$

# Analyse quantitative du modèle logistique

Au temps $t = 0$, l'effectif de la population est $N_0$

$$
\begin{array}{rlcl}
 & N(t) & = & \dfrac{KC_2}{C_2 + e^{-rt}} \\
\Leftarrow & N_0 & = & \dfrac{KC_2}{C_2 + 1} \\
\Longleftrightarrow & N_0(C_2 + 1) & = & KC_2 \\
\Longleftrightarrow & C_2(N_0 - K) & = & -N_0 \\
\Longleftrightarrow & C_2 & = & \dfrac{N_0}{K - N_0}
\end{array}
$$

# Analyse quantitative du modèle logistique

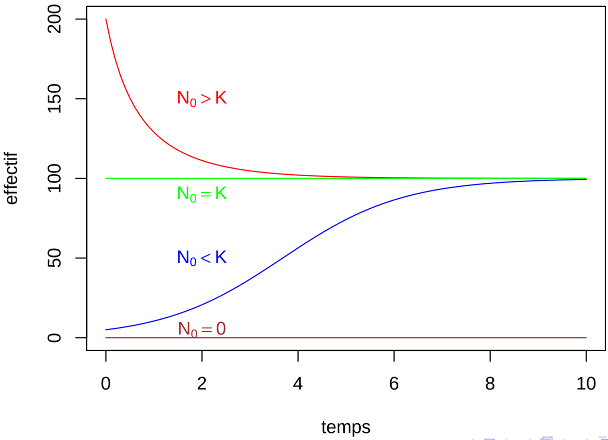
Les solutions de l'équation 3 sont donc du type :

$$N(t) = \frac{N_0 K}{N_0 + (K - N_0) e^{-rt}}. \tag{4}$$

Quatre cas possibles :

- Si $N_0 = 0$, alors $\forall t,\ N(t) = 0$.
- Si $K > N_0 > 0$, alors $\forall t,\ \dot{N} > 0$ et $\lim_{t\to\infty} N(t) = K$.
- Si $N_0 = K$, alors $\forall t,\ N(t) = N_0$.
- Si $N_0 > K$, alors $\forall t,\ \dot{N} < 0$ et $\lim_{t\to\infty} N(t) = K$.

# Représentation graphique des solutions (chroniques)



# Propriétés du système

Plutôt que l'étude quantitative détaillée du système, il serait intéressant d'étudier simplement ses propriétés :

- Existe-t-il des points invariants ?
- Comment le système évolue-t-il ailleurs qu'en ces points invariants ?
- Quelle est la forme des chroniques ?

# Plan détaillé

2. Un modèle non linéaire : le modèle logistique
   - Le modèle de Verhulst ou modèle logistique
   - Analyse quantitative du modèle logistique
   - Points singuliers
   - Portrait de phase, stabilité des points d'équilibre
   - Tracé des chroniques, points d'inflexion

# Les points singuliers ou points d'équilibre

## Le cas du modèle logistique

Un point d'équilibre $N^\star$ du modèle est tel qu'à ce point $N$ n'évolue plus, c'est à dire $\left.\frac{dN}{dt}\right|_{N=N^\star} = 0$.

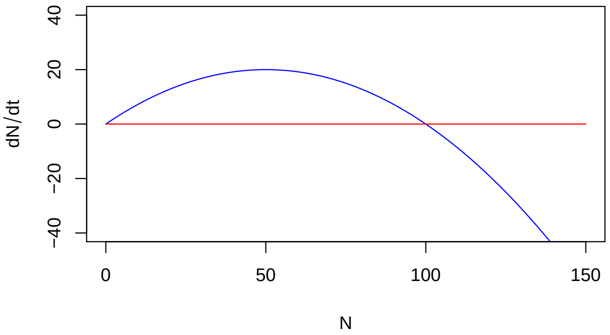
$$\left.\frac{dN}{dt}\right|_{N=N^\star} = 0 \iff rN^\star\left(1 - \frac{N^\star}{K}\right) = 0$$

Il existe deux points d'équilibre, $N_0^\star = 0$ et $N_1^\star = K$.
$N$ va-t-il tendre à se rapprocher de ces points d'équilibre ou bien à s'en éloigner ?

# L'évolution du système entre les points singuliers

## Le cas du modèle logistique

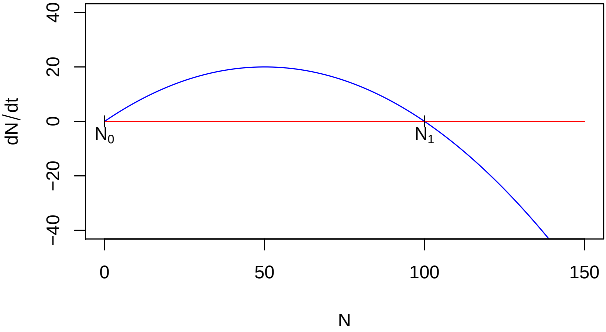
Pour savoir si $N$ croît ou décroît, on étudie le signe de $\dot{N}$



# L'évolution du système entre les points singuliers

## Le cas du modèle logistique

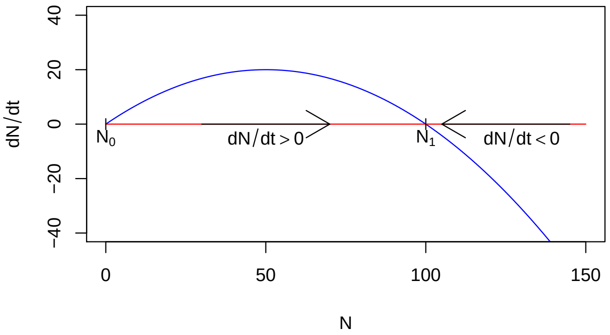
Aux points d'équilibre $N_0^\star$ et $N_1^\star$, $\frac{dN}{dt} = 0$.



# L'évolution du système entre les points singuliers

## Le cas du modèle logistique

Ailleurs, le signe de $\frac{dN}{dt}$ indique le sens d'évolution de $N$.



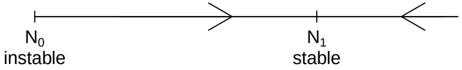
# Plan détaillé

2. Un modèle non linéaire : le modèle logistique
   - Le modèle de Verhulst ou modèle logistique
   - Analyse quantitative du modèle logistique
   - Points singuliers
   - Portrait de phase, stabilité des points d'équilibre
   - Tracé des chroniques, points d'inflexion

# Portrait de phase du système

## Le cas du modèle logistique

Le portrait de phase d'un système dynamique indique les points singuliers du système et le sens de variation de la variable étudiée de part et d'autre des points d'équilibre.



# Plan détaillé

2. Un modèle non linéaire : le modèle logistique
   - Le modèle de Verhulst ou modèle logistique
   - Analyse quantitative du modèle logistique
   - Points singuliers
   - Portrait de phase, stabilité des points d'équilibre
   - Tracé des chroniques, points d'inflexion

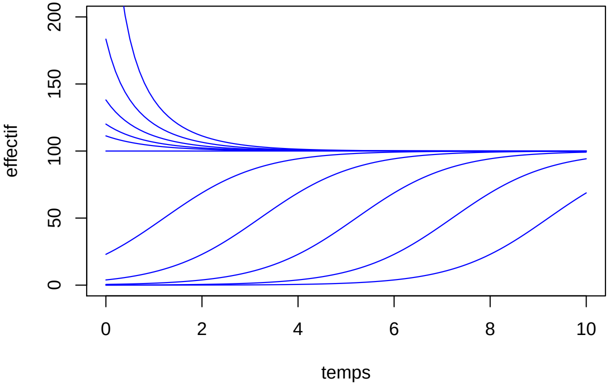
# Les chroniques

## Le cas du modèle logistique

Les chroniques d'un systèmes sont la représentation graphique des solutions. Elles ont les propriétés suivantes :

- Les chroniques ne sont jamais sécantes (par un point $(N, t)$ il ne passe qu'une seule chronique).
- Au voisinage des points d'équilibre, les pentes des chroniques tendent à devenir nulles (horizontales).
- La chronique passant par le point $(N, t+\lambda)$ s'obtient par translation de la chronique passant par le point $(N, t)$.

# Les chroniques
## Le cas du modèle logistique



# Table des matières

# Analyse qualitative d'un modèle quelconque dans $\mathbb{R}$

Comme nous l'avons vu pour le modèle logistique, il est possible d'effectuer une analyse qualitative d'un modèle lorsque celui-ci est trop complexes.

**Analyse quantitative**

- Recherche de solutions exactes.
- Étude des fonctions solutions.

**Analyse qualitative**

- Étude des propriétés des solutions.
- Étude des tendances (points d'équilibre, stabilité...)

# Plan détaillé

3. Principes de l'analyse qualitative
   - Les points singuliers ou points d'équilibre
   - Stabilité des points d'équilibre et linéarisation
   - Les points d'inflexion

# Points singuliers

Les points singuliers (ou points d'équilibre) notés $x^\star$ d'un système quelconque du type $\dot{x} = f(x)$ satisfont :

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=x^\star} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad f(x^\star) = 0.$$

Rechercher les points d'équilibre d'un système $\dot{x} = f(x)$ revient donc à trouver les solutions de l'équation $f(x) = 0$.
Un système peut n'avoir aucun point d'équilibre, un nombre fini ou un nombre infini de points d'équilibres.

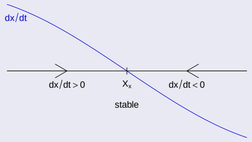
# Plan détaillé

3. Principes de l'analyse qualitative
   - Les points singuliers ou points d'équilibre
   - Stabilité des points d'équilibre et linéarisation
   - Les points d'inflexion

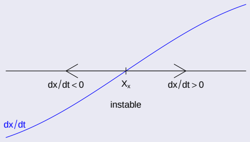
# Stabilité des points d'équilibre

Si dans un système quelconque $\dot{x} = f(x)$, la fonction $f$ est continue, alors il suffit d'étudier le signe de $f$ au voisinage des points d'équilibre pour connaître leur stabilité.
Il existe 4 cas possibles.

## $x^\star$ stable

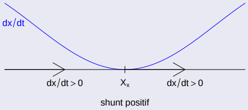



## $x^\star$ instable

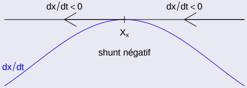


# Stabilité des points d'équilibre

## $x^\star$ shunt positif




## $x^\star$ shunt négatif



# Stabilité des points d'équilibre

## Linéarisation de $\frac{dx}{dt}$ au voisinage des points d'équilibre

On utilise un développement de Taylor d'ordre 1 pour linéariser $\frac{dx}{dt}$ au voisinage des points d'équilibre $x^\star$.

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &\approx \underbrace{f(x^\star)} + \underbrace{(x - x^\star)f'(x^\star)} \\
&\approx 0 + (x - x^\star)\left.\frac{d\dot{x}}{dx}\right|_{x=x^\star}
\end{aligned}$$

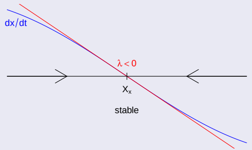
La stabilité de $x^\star$ dépend du signe de $\lambda = \left.\dfrac{d\dot{x}}{dx}\right|_{x=x^\star}$

# Stabilité des points d'équilibre

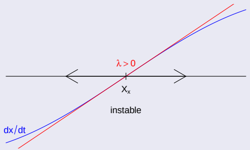
## Linéarisation de $\frac{dx}{dt}$ au voisinage des points d'équilibre

$\lambda = \left.\frac{d\dot{x}}{dx}\right|_{x=x^\star}$ est la pente de la tangeante à la courbe représentative de $\frac{dx}{dt} = f(x)$ au point $x = x^\star$.

### $\lambda < 0 \Rightarrow x^\star$ stable



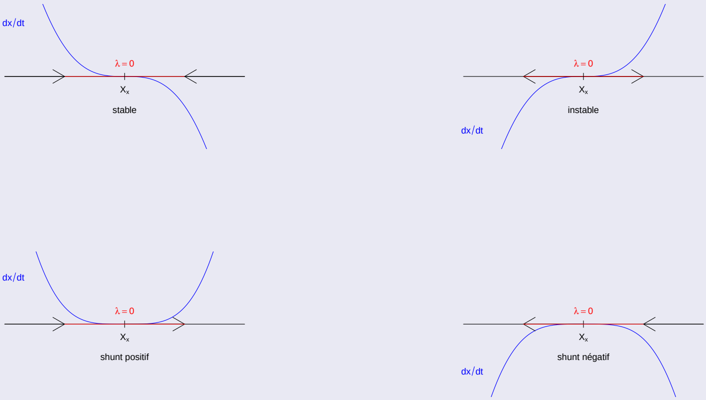

### $\lambda > 0 \Rightarrow x^\star$ instable



# Stabilité des points d'équilibre

## Linéarisation de $\frac{dx}{dt}$ au voisinage des points d'équilibre

### $\lambda = 0 \Rightarrow$ on ne peut pas conclure



# Plan détaillé

# Points d'inflexion

Les points d'inflexion des chroniques d'un système dynamique de type $\dot{x} = f(x)$ sont les points pour lesquels.

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dx}{dt} = \dot{x} \neq 0 \\[2ex] \dfrac{d^2x}{dt^2} = \dfrac{d\dot{x}}{dt} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{d\dot{x}}{dx}\dfrac{dx}{dt} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{d\dot{x}}{dx} = f'(x) = 0$$

# Points d'inflexion

Les points d'inflexion des chroniques d'un système dynamique de type $\dot{x} = f(x)$ sont les points différents des points singuliers qui s'obtiennent en résolvant l'équation

$$\left.\frac{d\dot{x}}{dx}\right|_{x=x_{\text{infl}}} = f'(x_{\text{infl}}) = 0.$$

# Points d'inflexion

## Exemple du modèle logistique

L'équation (3) du modèle de Verhulst vu précédemment est :

$$\dot{N} = \frac{dN}{dt} = rN(1 - \frac{N}{K}) = rN - \frac{rN^2}{K}$$

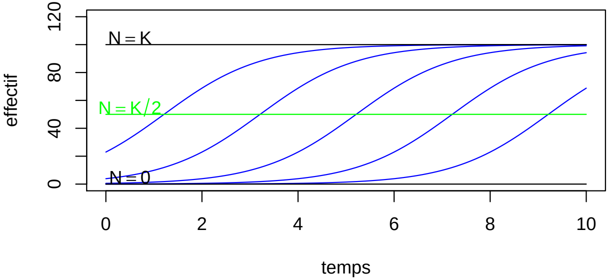
Il existe deux points d'équilibre, $N_0^\star = 0$ et $N_1^\star = K$.
Les points d'inflexion des chroniques vérifient

$$\frac{d\dot{N}}{dN} = 0 \iff r - \frac{2rN}{K} = 0 \iff N = \frac{K}{2}$$

# Points d'inflexion

## Exemple du modèle logistique

Les chroniques du modèle logistique présentent donc un point d'inflexion pour $N = \dfrac{K}{2}$.



# Table des matières

# Plan détaillé

4. Exemples de modèles classiques
   - Le modèle de Gompertz
   - Les modèles de populations exploitées
   - Un modèle de population exploitée : pêche avec quota
   - Un modèle de population exploitée : pêche à effort constant
   - Un modèle d'herbivorie (vu en TD)
   - Prédation de type II

# Le modèle de Gompertz

## Un concurrent du modèle logistique

Le modèle de Gompertz est un modèle de dynamique des populations. Son équation est la suivante :

$$\frac{dN}{dt} = -rN \ln N,$$

où $r > 0$.

# Le modèle de Gompertz

## Points d'équilibre

Les points d'équilibre vérifient $\left.\frac{dN}{dt}\right|_{N=N^\star} = 0$

$$\frac{dN}{dt} = -rN \ln N = 0 \iff \left| \begin{array}{l} N = N_0^\star = 0 \\ N = N_1^\star = 1 \end{array} \right.$$

# Le modèle de Gompertz

## Stabilité des points d'équilibre : linéarisation

$$\frac{d\dot{N}}{dN} = -rN\frac{1}{N} - r\ln N = -r(1+\ln N)$$

- $\left.\frac{d\dot{N}}{dN}\right|_{N=0}$ n'est pas défini, mais $\lim_{\epsilon\to 0^+} \left.\frac{d\dot{N}}{dN}\right|_{N=\epsilon} = +\infty$, donc $N_0^\star = 0$ est instable.
- $\left.\frac{d\dot{N}}{dN}\right|_{N=1} = -r < 0$ donc $N_1^\star = 1$ est stable.

# Le modèle de Gompertz

## Points d'inflexion

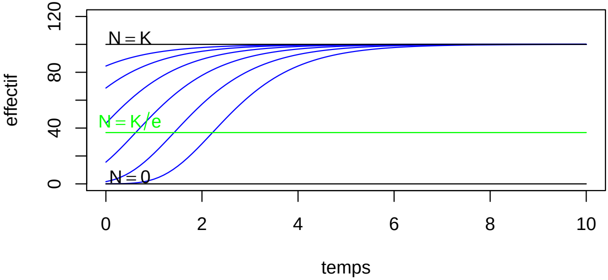
$$\frac{d\dot{N}}{dN} = -rN\frac{1}{N} - r\ln N = -r(1 + \ln N) = 0 \iff N = e^{-1}$$

Les chroniques des solutions du modèle de Gompertz présentent donc un point d'inflexion pour $N = e^{-1}$.

# Le modèle de Gompertz

## Chroniques

Un changement d'échelle peut permettre d'adapter le modèle de Gompertz pour obtenir une capacité limite de $K$ individus et un point d'inflexion pour $N = \dfrac{K}{e}$.



# Plan détaillé

4. Exemples de modèles classiques
   - Le modèle de Gompertz
   - Les modèles de populations exploitées
   - Un modèle de population exploitée : pêche avec quota
   - Un modèle de population exploitée : pêche à effort constant
   - Un modèle d'herbivorie (vu en TD)
   - Prédation de type II

# Les modèles de populations exploitées

Les modèles de populations exploitées sont utilisés pour leur intérêt commercial ou écologique. De nombreux modèles ont été proposés, ils sont toujours composés :

- d'un type de croissance (Logistique, Gompertz...)
- d'un type de prédation (constant, linéaire, non linéaire...)

Dans le cadre de ce cours nous verrons quatre modèles de populations exploitées. Pour chaque modèle, la croissance de la population sera de type logistique.

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right)$$

# L'exploitation d'une population

L'exploitation d'une population consiste à prélever des individus dans cette population. Ce prélèvement peut-être

- Constant
- Proportionnel à la taille de la population
- non linéaire et croissant avec le taille de la population

# Plan détaillé

4. Exemples de modèles classiques
   - Le modèle de Gompertz
   - Les modèles de populations exploitées
   - Un modèle de population exploitée : pêche avec quota
   - Un modèle de population exploitée : pêche à effort constant
   - Un modèle d'herbivorie (vu en TD)
   - Prédation de type II

# Pêche avec quota

## Equation du modèle

Il s'agit du modèle le plus simple d'exploitation, où la quantité d'individus prélevés par unité de temps est constante $Q$ (quota).

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) - Q$$

# Pêche avec quota
## Points d'équilibre

On résoud $\dfrac{dN}{dt} = 0$.

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) - Q &= 0 \\ \iff & -\frac{r}{K}N^2 + rN - Q = 0 \end{aligned}$$

Il existe 3 cas possibles selon le signe de $\Delta = r^2 - 4\dfrac{rQ}{K}$

# Pêche avec quota
## Points d'équilibre

$$\Delta = r^2 - 4\frac{rQ}{K} = r\left(r - \frac{4Q}{K}\right)$$

- $r - \frac{4Q}{K} > 0 \iff Q < \frac{rK}{4} \Rightarrow \Delta > 0 \Rightarrow$ il existe 2 points d'équilibre.
- $r - \frac{4Q}{K} = 0 \iff Q = \frac{rK}{4} \Rightarrow \Delta = 0 \Rightarrow$ il existe 1 point d'équilibre.
- $r - \frac{4Q}{K} < 0 \iff Q > \frac{rK}{4} \Rightarrow \Delta < 0 \Rightarrow$ il n'existe pas de point d'équilibre.

# Pêche avec quota

## Points d'équilibre, $Q < \frac{rK}{4}$

Dans le cas $\Delta > 0$, les points d'équilibre sont :

- $N_0^\star = K\dfrac{r - \sqrt{r^2 - 4\frac{rQ}{K}}}{2r} > 0$
- $N_1^\star = K\dfrac{r + \sqrt{r^2 - 4\frac{rQ}{K}}}{2r} > 0$

Avec $0 < N_0^\star < \dfrac{K}{2} < N_1^\star < K$.

# Pêche avec quota

## Points d'équilibre, $Q = \frac{rK}{4}$

Dans le cas $\Delta = 0$, le seul point d'équilibre est :

$$N^\star = \frac{K}{2}$$

# Pêche avec quota

$Q > \frac{rK}{4}$

Dans le cas $\Delta > 0$, il n'y a pas de point d'équilibre et

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) - Q < 0.$$

Le modèle prédit que la taille de la population décroît sans cesse. Peut-on trouver une méthode *simple* expliquant ces résultats ?

# L'exploitation d'une population

## Qu'est-ce qu'un point d'équilibre ?

L'exploitation d'une population consiste à prélever des individus dans cette population. Ce prélèvement peut-être

- Constant
- Proportionnel à la taille de la population
- non linéaire et croissant avec le taille de la population

Un éventuel état d'équilibre est atteint lorsque la croissance naturelle de la population compense exactement le prélèvement sur celle-ci.

# La croissance logistique

On s'intéresse à la fonction $\dot{N} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) = rN - r\frac{N^2}{K}$.

- Racines (points d'équilibre du modèle logistique)
- Tangeantes aux points d'équilibre
- Extremums (points d'inflexion des chroniques)

# La croissance logistique
## Points d'équilibre

$$\dot{N} = 0 \iff rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) = rN - r\frac{N^2}{K} = 0$$

Deux points d'équilibre :

- $N_0^\star = 0$
- $N_1^\star = K$

# La croissance logistique

## Extremum

$$\frac{d\dot{N}}{dN} = 0 \iff r - 2r\frac{N}{K} = 0 \iff N = \frac{K}{2}$$

$\frac{dN}{dt}$ admet un maximum local pour $N = \frac{K}{2}$, qui vaut :

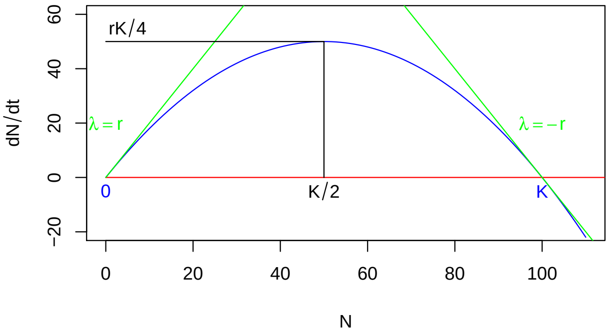
$$\left.\frac{dN}{dt}\right|_{N=\frac{K}{2}} = r\frac{K}{2}\left(1 - \frac{K}{2K}\right) = \frac{rK}{4}$$

# La croissance logistique
## Tangeantes aux points d'équilibre

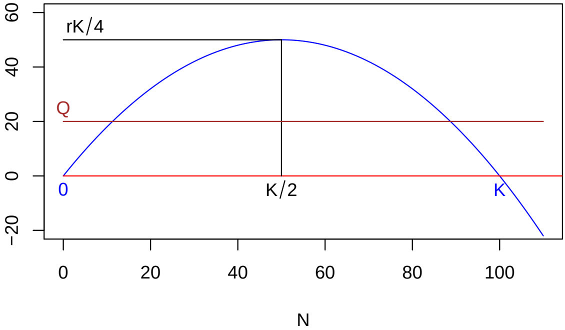
$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt}\Big|_{N=0} &= r \\ \frac{dN}{dt}\Big|_{N=K} &= r - 2r\frac{K}{K} = -r \end{aligned}$$

Les pentes des tangeantes aux points d'équilibre sont respectivement $r$ et $-r$.

# La croissance logistique

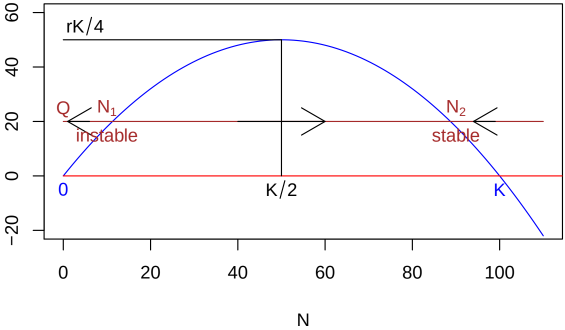


# Pêche avec quota



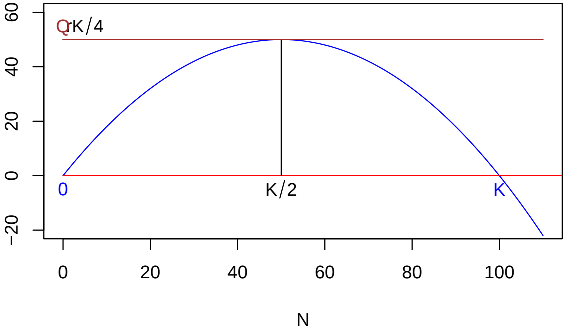

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) - Q, \quad Q < \frac{rK}{4}$$

# Pêche avec quota



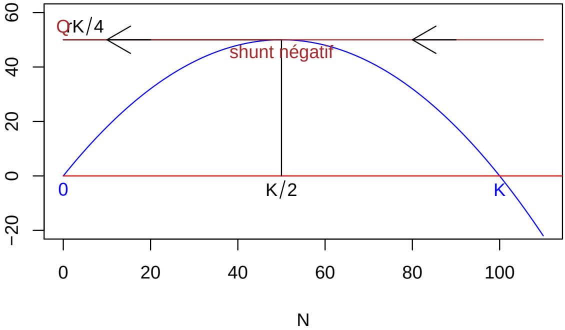

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) - Q, \quad Q < \frac{rK}{4}$$

# Pêche avec quota



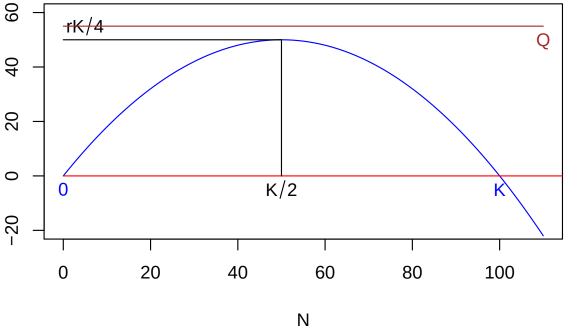

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) - Q, \quad Q = \frac{rK}{4}$$

# Pêche avec quota



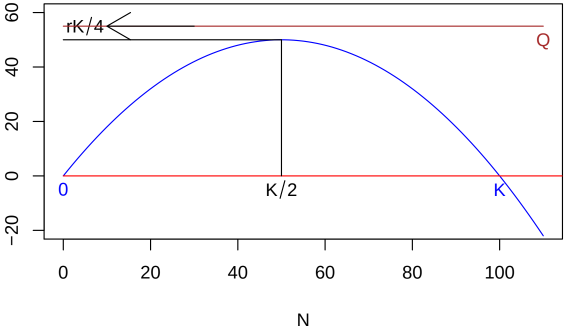

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) - Q, \quad Q = \frac{rK}{4}$$

# Pêche avec quota




$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) - Q, \quad Q > \frac{rK}{4}$$

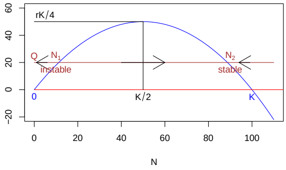
# Pêche avec quota




$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) - Q, \quad Q > \frac{rK}{4}$$

# Pêche avec quota
## Conclusions

- Dans le meilleur des cas, 2 états d'équilibre.
- 1 état instable / 1 état stable.
- L'augmentation du quota rapproche les deux états.
- On ne peut pas pêcher avec $Q \geq \frac{rK}{4}$.



# Plan détaillé

4. Exemples de modèles classiques
   - Le modèle de Gompertz
   - Les modèles de populations exploitées
   - Un modèle de population exploitée : pêche avec quota
   - Un modèle de population exploitée : pêche à effort constant
   - Un modèle d'herbivorie (vu en TD)
   - Prédation de type II

# Pêche à effort constant

## Equation du modèle

Ici, l'effort de pêche $E$ est constant, c'est à dire que la quantité d'individus prélevés par unité de temps est proportionnelle à la taille de la population $EN$.

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) - EN$$

# Pêche à effort constant
## Points d'équilibre

On résoud $\dfrac{dN}{dt} = 0.$

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) - EN = 0 \\ \iff & N\left(r\left(1 - \frac{N}{K}\right) - E\right) = 0 \end{aligned}$$

Il existe deux points d'équilibre : $N_0^\star = 0$ et $N_1^\star = K\dfrac{r-E}{r}$

$N_1^\star$ n'a de sens biologique que si $N_1^\star > 0$, c'est à dire $r > E$

# Pêche à effort constant

## Optimum de l'effort de pêche, $E < r$

Dans le cas où $N_1^\star$ existe, on peut chercher un optimum de l'effort de pêche permettant d'obtenir le prélèvement le plus élevé possible. La quantité pêchée au point d'équilibre $N_1^\star$ est :

$$EN_1^\star = EK\frac{r-E}{r} = KE - K\frac{E^2}{r}$$

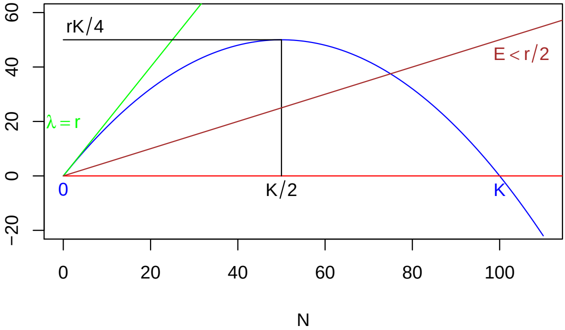
# Pêche à effort constant

L'optimum de l'effort de pêche $E^\star$ est tel que $EN_1^\star$ est maximum pour $E = E^\star$, soit

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{dEN^\star}{dE}\right|_{E=E^\star} &= K - 2\frac{KE^\star}{r} = 0 \\
\iff \quad & E^\star = \frac{rK}{2K} \\
\iff \quad & E^\star = \frac{r}{2}
\end{aligned}
$$

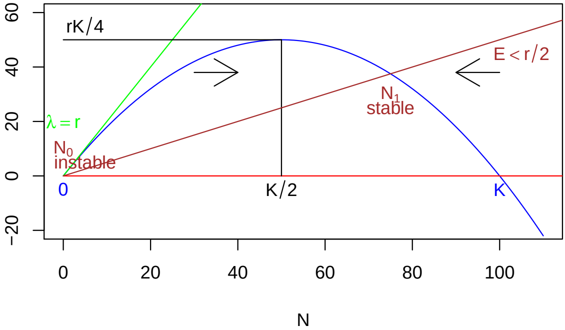
À l'effort de pêche optimum, la population est maintenue à une taille $N_{\text{opt}}^\star = K\frac{r-E^\star}{r} = \frac{K}{2}$, et la quantité d'individus prélevés est $N_{\text{opt}}^\star E^\star = \dfrac{rK}{4}$

# Pêche à effort constant



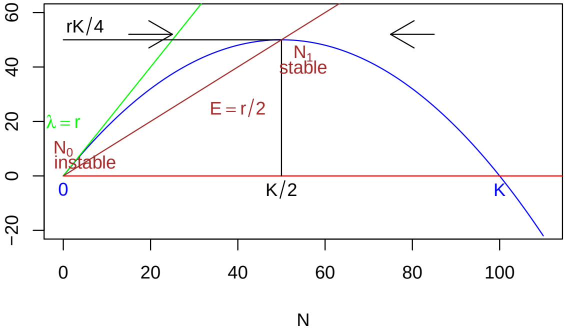

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) - EN, E < \frac{r}{2}$$

# Pêche à effort constant



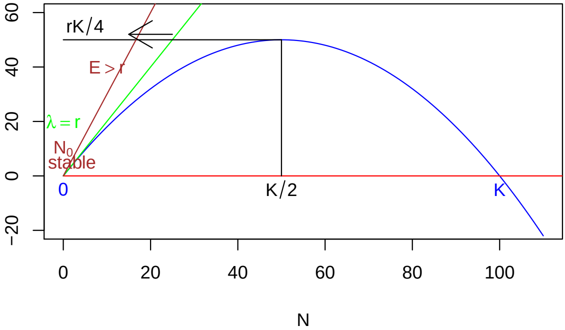

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) - EN, E < \frac{r}{2}$$

# Pêche à effort constant




$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) - EN, E = \frac{r}{2}$$

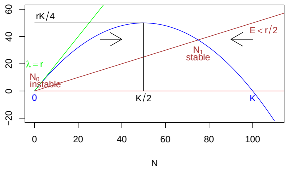
# Pêche à effort constant




$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) - EN \,, E > r$$

# Pêche à effort constant
## Conclusions

- 2 états d'équilibre tant que $E < r$.
- 1 état instable / 1 état stable.
- La population ne s'éteint que lorsque $E > r$



# Plan détaillé

4 Exemples de modèles classiques

- Le modèle de Gompertz
- Les modèles de populations exploitées
- Un modèle de population exploitée : pêche avec quota
- Un modèle de population exploitée : pêche à effort constant
- Un modèle d'herbivorie (vu en TD)
- Prédation de type II

# Prédation de type I - cf TD

## La fonction de prélèvement

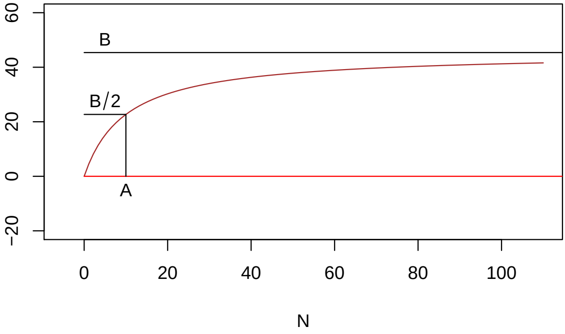
Le terme de prédation est analogue au modèle de cinétique enzymatique de Michaelis-Menten, de la forme

$$\frac{BN}{A+N}$$

- $B$ est la vitesse maximale de prélèvement.
- Pour, $N = A$, la vitesse de prélèvement est $\frac{B}{2}$

# Prédation de type I

## La fonction de prélèvement



# Un modèle d'herbivorie (vu en TD)

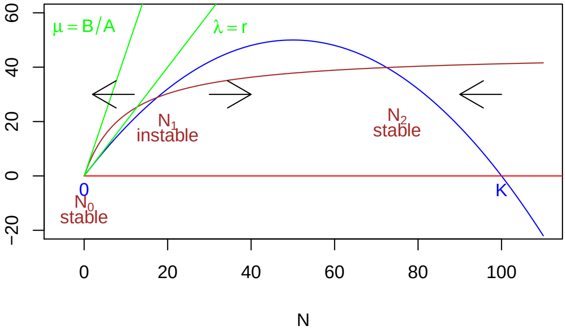
## Equation du modèle

Une population d'herbacées dont la croissance est logistique est consommée par des herbivores selon une prédation de type I.

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) - \frac{BN}{A + N}$$

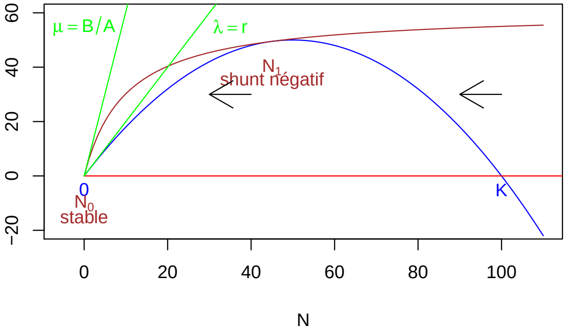
# Un modèle d'herbivorie (vu en TD)

Cas $\frac{B}{A} > r$ et $B < \frac{Kr}{4}\left(1 + \frac{A}{K}\right)$



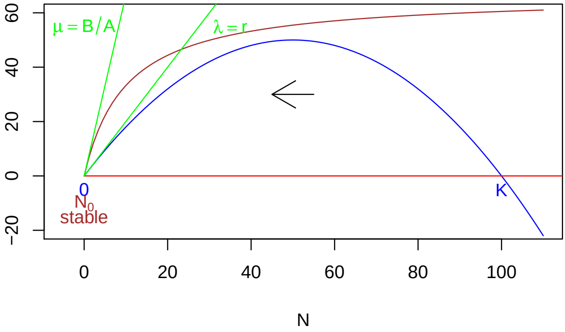
# Un modèle d'herbivorie (vu en TD)

Cas $\frac{B}{A} > r$ et $B = \frac{Kr}{4}\left(1 + \frac{A}{K}\right)$



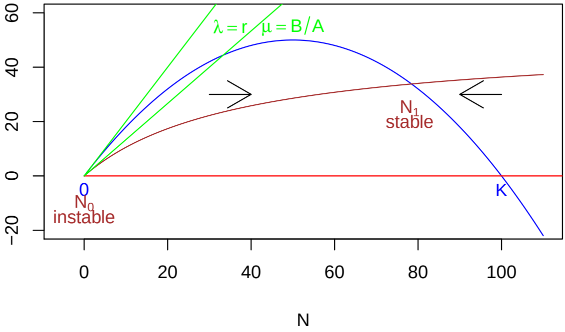
# Un modèle d'herbivorie (vu en TD)

Cas $\frac{B}{A} > r$ et $B > \frac{Kr}{4}\left(1 + \frac{A}{K}\right)$



# Un modèle d'herbivorie (vu en TD)

Cas $\frac{B}{A} < r$



# Plan détaillé

4. Exemples de modèles classiques
   - Le modèle de Gompertz
   - Les modèles de populations exploitées
   - Un modèle de population exploitée : pêche avec quota
   - Un modèle de population exploitée : pêche à effort constant
   - Un modèle d'herbivorie (vu en TD)
   - Prédation de type II

# Prédation de type II
## La fonction de prélèvement

La prédation de type II se caractérise par une forme sigmoïde de la fonction de prélèvement.
Un tel modèle présente un “effet seuil” de l'effectif de la population sur la prédation.
Le terme de prélèvement est de la forme :

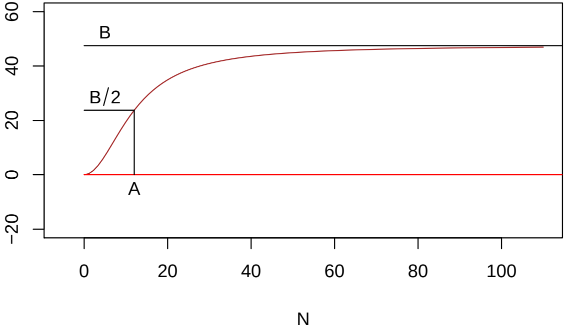
$$\frac{BN^2}{A^2 + N^2}$$

- $B$ est la vitesse maximale de prélèvement.
- Pour, $N = A$, la vitesse de prélèvement est $\frac{B}{2}$

Ce type de prélèvement a été utilisé pour décrire dynamique de populations d'insectes consommés par des oiseaux et pouvant montrer des épisodes de pullulation.

# Prédation de type II

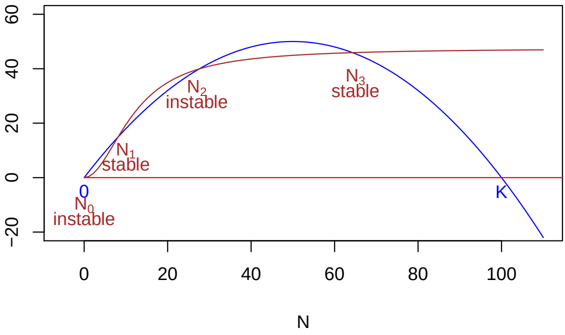
## La fonction de prélèvement



# Prédation de type II

## Cas à 4 états d'équilibre

.



# Prédation de type II

Ce type de prédation a été utilisé pour décrire dynamique de populations d'insectes consommés par des oiseaux et pouvant montrer des épisodes de pullulation.

- La population d'insectes est normalement maintenue à l'état d'équilibre $N_1$
- Un changement écologique (disparition d'un certain nombre d'oiseaux) abaisse $B$ et l'effectif de la population est alors compris entre les nouvelles valeurs de $N_2$ et $N_3$.
- Sans nouveau changement, l'effectif de la population atteint son nouvel état d'équilibre $N_3$.

# Table des matières

# Conclusions

## Analyse des systèmes dynamiques dans $\mathbb{R}$

Nous avons appris à effectuer l'analyse qualitative d'un système dynamique quelconque dans $\mathbb{R}$ du type $\dot{x} = f(x)$

- Recherche de points d'équilibre ($f(x^\star) = 0$),
- Étude de la stabilité (signe de $f$ entre les points d'équilibre ou linéarisation de $f$ aux points d'équilibre),
- Étude de la forme des chroniques (courbes des solutions de l'équation de $\dot{x} = f(x)$).

# Conclusions

## Modèles biologiques

Nous avons envisagé des modèles de dynamique des populations impliquant une seule population. De tels cas existent, cependant on pourrait envisager la dynamique de populations en interactions :

- Interactions entre proies et prédateurs,
- Interactions entre hôtes et parasites. . .

Pour l'étude de tels modèles, la dernière partie de ce cours s'intéressera aux systèmes de deux EDO du premier ordre (systèmes dynamiques dans $\mathbb{R}^2$).

# Table des matières

# Plan détaillé

La dynamique d'une population exploitée vérifie l'équation suivante :

$$\frac{dN}{dt} = -rN \ln \frac{N}{K} - EN,$$

où $r$, $K$ et $E$ sont des paramètres strictement positifs.

1. De quel type d'exploitation s'agit-il ?
2. Quel est le modèle de croissance de la population en l'absence d'exploitation ?
3. Déterminez les points d'équilibre du système.
4. À l'aide d'une méthode de votre choix, déterminez la stabilité des points d'équilibre.
5. Tracez le portrait de phase du système.
6. Tracez les chroniques du système.
7. Pour quelle valeur de $E$ l'exploitation de la population est-elle optimale, quel est alors l'effectif de la population ?

# Plan détaillé

6. Exemple : Exercice d'annales (Contrôle continu décembre 2006)
   - Sujet CC décembre 2006
   - Correction CC décembre 2006

# Type d'exploitation

L'équation du système dynamique est

$$\frac{dN}{dt} = -rN \ln \frac{N}{K} - EN.$$

Le terme d'exploitation est $EN$.
$\Rightarrow$ Il s'agit d'une exploitation à effort constant.

# Modèle de croissance

L'équation du système dynamique est

$$\frac{dN}{dt} = -rN \ln \frac{N}{K} - EN.$$

En l'absence d'exploitation, le système devient

$$\frac{dN}{dt} = -rN \ln \frac{N}{K}.$$

$\Rightarrow$ On reconnaît le modèle de Gompertz.

# Points d'équilibre

L'équation du système dynamique est

$$\frac{dN}{dt} = -rN \ln \frac{N}{K} - EN.$$

Les points d'équilibre du système vérifient :

$$\begin{aligned} & \frac{dN}{dt} = 0 \\ \iff \quad & \left(-r \ln \frac{N}{K} - E\right) N = 0 \end{aligned}$$

On note que $\frac{dN}{dt}$ n'est à priori pas défini pour $N = 0$, mais que $\lim_{N \to 0^+} \frac{dN}{dt} = 0$. $N_0^\star = 0$ est donc un point d'équilibre.

# Points d'équilibre

Le second point d'équilibre vérifie :

$$\begin{aligned} & -r\ln\frac{N}{K} - E = 0 \\ \Longleftrightarrow \quad & \ln\frac{N}{K} = -\frac{E}{r} \\ \Longleftrightarrow \quad & \frac{N}{K} = e^{-\frac{E}{r}} \\ \Longleftrightarrow \quad & N = Ke^{-\frac{E}{r}} \end{aligned}$$

Il existe donc deux points d'équilibre :

- $N_0^\star = 0$
- $N_1^\star = Ke^{-\frac{E}{r}}$

# Stabilité des points d'équilibre

On utilise le théorème de linéarisation.

$$\frac{d\dot{N}}{dN} = -r - r\ln\frac{N}{K} - E$$

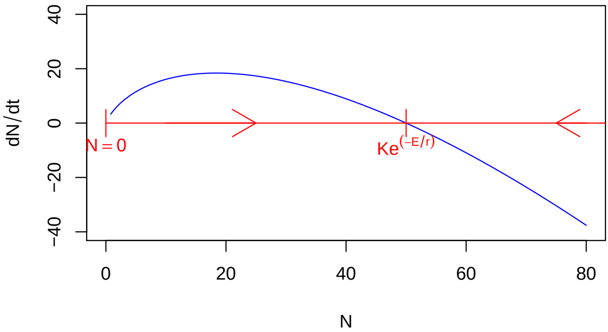
$\frac{d\dot{N}}{dN}$ n'est pas définie lorsque $N = 0$ mais $\lim_{N\to 0^+}\frac{d\dot{N}}{dN} = +\infty$.

$$\Rightarrow N_0^\star = 0 \text{ est un point d'équilibre instable.}$$

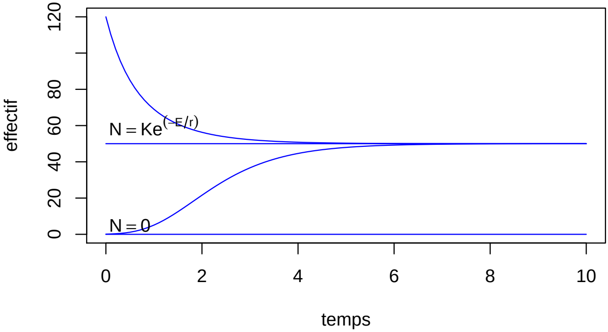
$$\left.\frac{d\dot{N}}{dN}\right|_{N=Ke^{-\frac{E}{r}}} = -r < 0$$

$$\Rightarrow N_1^\star = Ke^{-\frac{E}{r}} \text{ est un point d'équilibre stable.}$$

# Portrait de phase du système



# Chroniques du système



# Effort optimal d'exploitation

À l'équilibre, la quantité capturée est $EN_1^\star = EKe^{-\frac{E}{r}}$. Cette quantité est maximale lorsque :

$$\begin{aligned} & \frac{d\left(EKe^{-\frac{E}{r}}\right)}{dE} = 0 \\ \iff \quad & Ke^{-\frac{E}{r}}\left(1 - \frac{E}{r}\right) = 0 \\ \iff \quad & E = r \end{aligned}$$

L'effort d'exploitation est optimal pour $E = r$, la population est alors maintenue à une taille $Ke^{-1}$