Exercices avec le logiciel R

Épreuve Biologie & Modélisation - Contrôle terminal - 3 juin 2004

J.R. Lobry

Durée 1h30

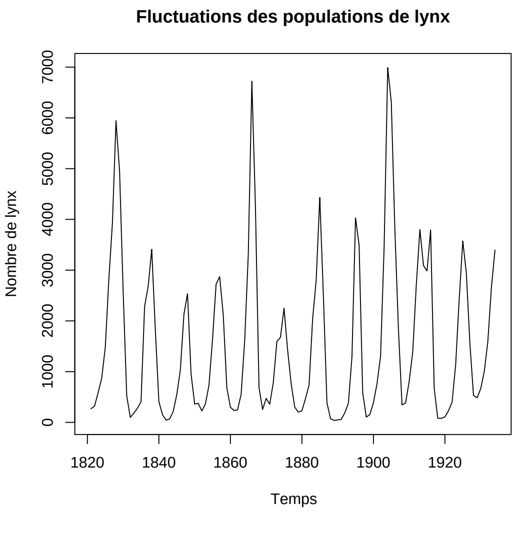
Tous documents autorisés - échanges strictement interdits.

1 Lynx (1 point)

On considère le jeu de données `lynx` contenu dans la librairie de base de R. Écrire l'instruction qui permet de connaître les informations contenues dans `lynx`.

2 Représentation graphique (1 point)

Expliquez en une phrase pourquoi la représentation graphique suivante n'est pas bonne.



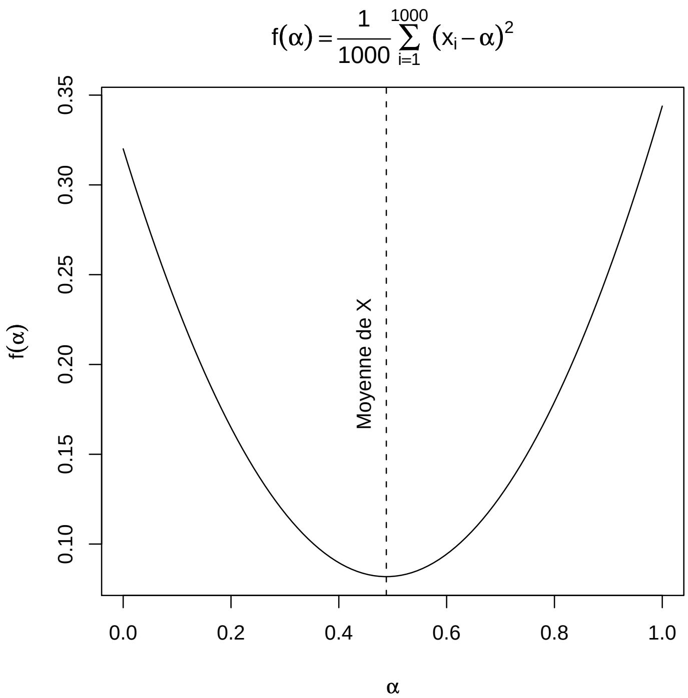
3 Moyenne des carrés des écarts (2 points)

On considère un vecteur, `X`, de 1000 valeurs tirées au hasard, par exemple dans une distribution uniforme entre 0 et 1 :

```
X <- runif(1000)
```

On définit une fonction, `f`, pour calculer la moyenne des carrés des écarts entre les valeurs de `X` et une valeur `alpha` donnée, puis on la représente avec les instructions suivantes :

```
f <- function(alpha) {
    sum((X - alpha)^2)/length(X)
}
abscisse <- seq(from = 0, to = 1, length = 100)
plot(x = abscisse, y = sapply(abscisse, f), type = "l", xlab = expression(alpha),
    ylab = expression(f(alpha)), main = expression(f(alpha) == frac(1,
        1000) * sum((x[i] - alpha)^2, i == 1, 1000)))
abline(v = mean(X), lty = 2)
text(x = 0.45, y = 0.2, "Moyenne de X", srt = 90)
```



Commentez en un paragraphe maximum ce graphique.

4 Démonstration (1 point)

Comment démontreriez-vous la propriété illustrée par le graphique de la question précédente ? On ne demande pas de démonstration, mais une idée de la démarche à suivre.

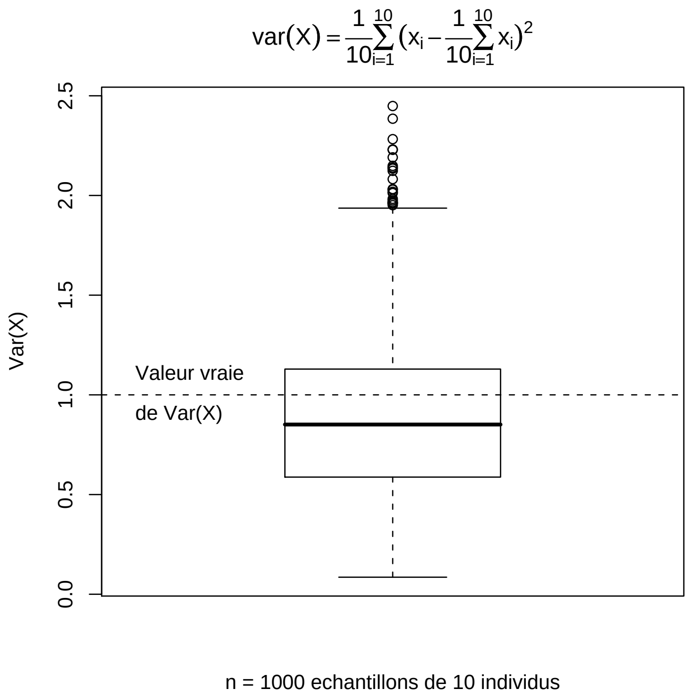
5 Variance (2 points)

On appelle variance d'une série de valeurs la moyenne des carrés des écarts à la moyenne. On définit une fonction `var.echantillon` qui tire au hasard n individus dans une population dont on sait par ailleurs que la variance est égale à un. Cette fonction cherche donc à deviner la variance de la population à partir d'un échantillon :

```
var.echantillon <- function(n) {
    X <- rnorm(n)
    return(sum((X - mean(X))^2)/length(X))
}
```

Pour tester le comportement de cette fonction on décide de l'utiliser 1000 fois avec un échantillon de taille n = 10 individus et de représenter graphiquement les résultats :

```
experience <- sapply(rep(10, 1000), var.echantillon)
boxplot(experience, xlab = "n = 1000 echantillons de 10 individus",
    ylab = "Var(X)", main = expression(var(X) == frac(1, 10) * sum((x[i] -
        frac(1, 10) * sum(x[i], i == 1, 10))^2, i == 1, 10)))
abline(h = 1, lty = 2)
text(x = 0.5, y = 1.1, "Valeur vraie", pos = 4)
text(x = 0.5, y = 0.9, "de Var(X)", pos = 4)
```



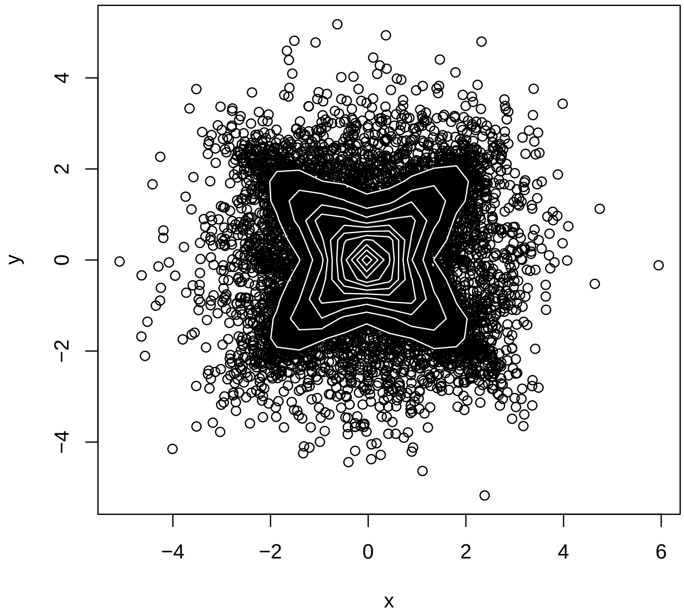
Commentez en un paragraphe maximum ce graphique.

6 Lien (1 point)

Quel lien faites-vous entre la propriété illustrée par ce dernier graphique de let celui de la question 2 ?

7 Corrélation (2 points)

On a mesuré les caractères x et y sur 15000 individus. Le coefficient de corrélation linéaire entre x et y n'est pas significativement différent de 0. La représentation graphique des données est la suivante :



Commentez en un paragraphe maximum ces résultats.

8 Equation de croissance d'une population soumise à la prédation (10 points)

Soit l'équation différentielle ordinaire suivante gouvernant la variable $x(t)$ qui représente la densité d'une population d'insectes à l'instant t :

$$\frac{dx}{dt} = rx(K - x)$$

où les paramètres r et K sont des paramètres strictement positifs.

1. Recherchez les points d'équilibre de cette équation. Déterminez la nature des équilibres, c'est-à-dire leur propriété de stabilité locale. Dessinez le portrait de phase correspondant. Interprétez vos résultats.
2. Résoudre l'équation différentielle par la méthode de séparation des variables pour une condition initiale strictement positive $x(0)$. Dessinez la chronique, c'est-à-dire la solution $x(t)$ en fonction du temps pour une condition initiale positive. Interprétez votre résultat en ce qui concerne la croissance de la population.
3. La population est soumise à une infection par un parasite de densité constante. La loi de croissance de la population est maintenant soumise à l'équation :
$$\frac{dx}{dt} = rx(K_1 - x)(M - x)(K_2 - x)$$

Les paramètres vérifient $r > 0$ et $K_2 > M > K_1 > 0$. Recherchez les points d'équilibre de cette équation. Déterminez la nature des équilibres, c'est-à-dire leur propriété de stabilité locale. Dessinez le portrait de phase correspondant. Dessinez les chroniques, (solutions $x(t)$) pour diverses conditions initiales $x(0)$ positives. Interprétez vos résultats.