


Exercices avec le logiciel 

Épreuve Biologie & Modélisation - Contrôle terminal - 11 mai 2006

S. Mousset & J.R. Lobry

Durée 1h30

*Tous documents autorisés - échanges strictement interdits. Modèles
proies-prédateurs. Lièvres et lynx. Analyse qualitative des équations.*

1 Répondre directement sur la feuille

Nom :
Prénom :
Numéro carte étudiant :

2 Modélisation

On s'intéresse à la dynamique de deux populations en interaction (une population de proies N et une de prédateurs P). On utilise le modèle suivant :

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = rN - \alpha NP \\ \frac{dP}{dt} = -\mu P + \beta NP \end{cases} \quad (1)$$

où N et P désignent respectivement l'effectif (ou la biomasse) des proies et des prédateurs et r , α , μ et β sont des paramètres positifs. On propose que dans ce modèle le produit NP est proportionnel à la probabilité de rencontre entre une proie et un prédateur.

2.1 Interprétation biologique

En l'absence de prédateur ($P = 0$), nommez le type de croissance des proies.

Réponse :

Que représente la quantité αNP ?

Réponse :

Que représente le paramètre μ ?

Réponse :

Que représente la quantité βNP ?

Réponse :

2.2 Analyse qualitative des équations

Trouvez deux conditions (sur N et P) pour que $\frac{dN}{dt} = 0$.

Réponse :

Trouvez deux conditions (sur N et P) pour que $\frac{dP}{dt} = 0$.

Réponse :

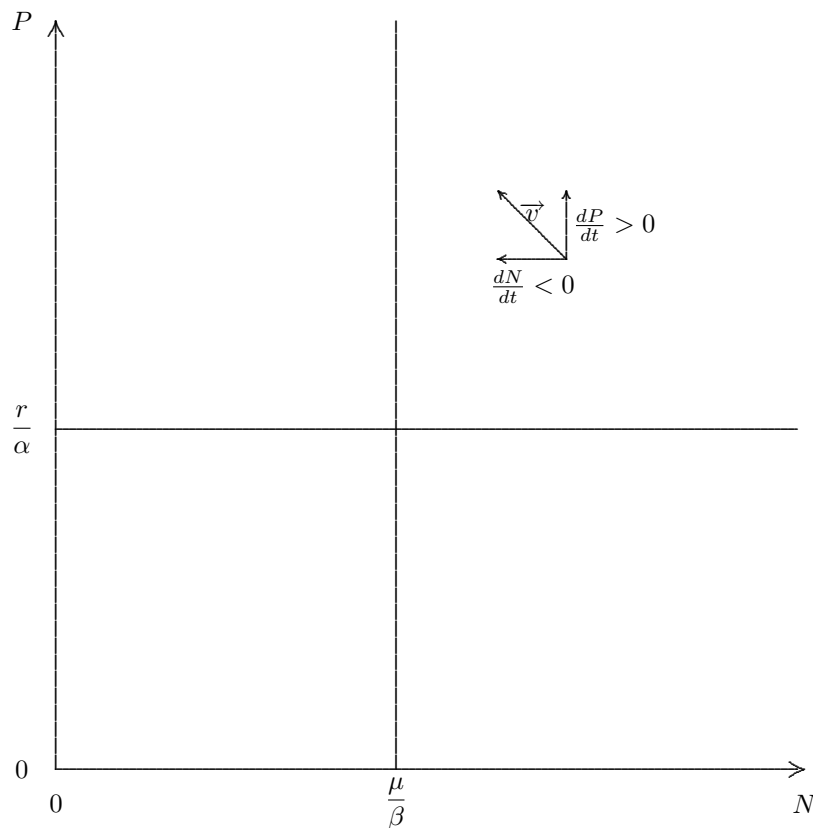
Que se passe-t-il lorsque $N = \frac{\mu}{\beta}$ et $P = \frac{r}{\alpha}$?

Réponse :

On représente l'évolution des effectifs N et P dans le repère N, P (une telle représentation s'appelle un "portrait de phase"). Dans le quadrant positif ($N \geq 0$ et $P \geq 0$), l'évolution instantanée des effectifs N et P se fait selon la direction du vecteur vitesse $\vec{v} = \left(\frac{dN}{dt}, \frac{dP}{dt} \right)$.

Complétez la figure 1 en représentant la direction des vecteurs vitesse \vec{v} dans les quatre régions délimitées par les axes ($N = 0$ et $P = 0$) et les droites $P = \frac{r}{\alpha}$ et $N = \frac{\mu}{\beta}$, ainsi que sur ces axes et droites.

FIG. 1 – Portrait de Phase



Les solutions $(N(t), P(t))$ du système 1 vérifient

$$\left. \begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= rN - \alpha NP \\ \frac{dP}{dt} &= -\mu P + \beta NP \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{dN}{dP} = \frac{(r - \alpha P)N}{(\beta N - \mu)P}$$

$$\Rightarrow \frac{\beta N - \mu}{N} dN = \frac{r - \alpha P}{P} dP$$

$$\Rightarrow \int \left(\beta - \frac{\mu}{N}\right) dN = \int \left(\frac{r}{P} - \alpha\right) dP$$

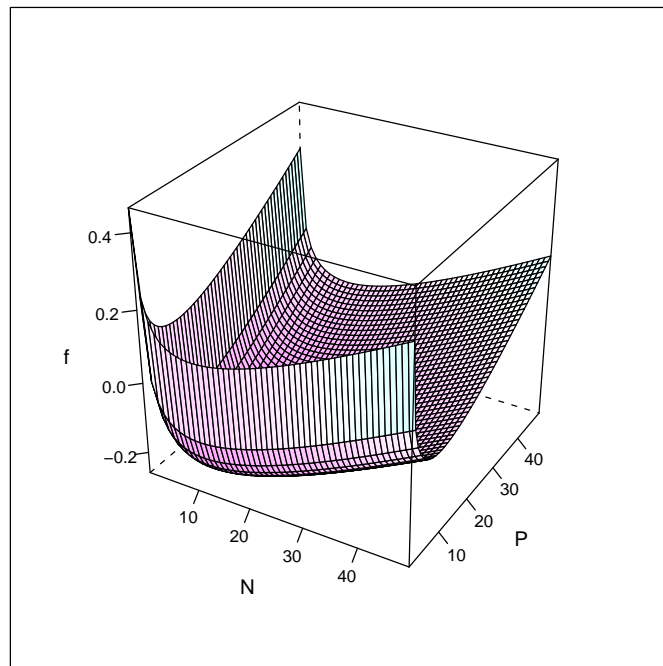
$$\Rightarrow \beta N - \mu \ln(N) + \alpha P - r \ln(P) = K$$

où K est une constante quelconque.

On note $f(N, P) = \beta N - \mu \ln(N) + \alpha P - r \ln(P)$. La figure 2 est une représentation en 3 dimensions de $f(N, P)$ pour $r = 0.1$, $\alpha = 0.01$, $\mu = 0.1$ et $\beta = 0.01$.

Cette fonction admet un minimum local en $\left(N = \frac{\mu}{\beta}, P = \frac{r}{\alpha}\right)$.

FIG. 2 – La fonction $f(N, P) = \beta N - \mu \ln(N) + \alpha P - r \ln(P)$



Sachant que les solutions $(N(t), P(t))$ du système 1 vérifient $f(N, P) = K$, et que $f(N, P)$ admet un minimum en $(N = \frac{\mu}{\beta}, P = \frac{r}{\alpha})$, que pensez-vous des solutions $(N(t), P(t))$

Réponse :

3 Statistiques

On a estimé les effectifs d'une population de lièvres (**Hare**) et de lynx (**Lynx**) au cours du temps (**t**). À quoi sert l'instruction suivante :

```
lh <- read.table("http://pbil.univ-lyon1.fr/R/donnees/lynxhare.txt",
  header = TRUE)
```

Réponse :

Comment faire pour afficher les données de l'année 1914 :

```
t Hare Lynx
70 1914 40.97 43.36
```

Réponse :

Comment faire pour calculer le nombre moyen de lapins :

```
[1] 45.40648
```

Réponse :

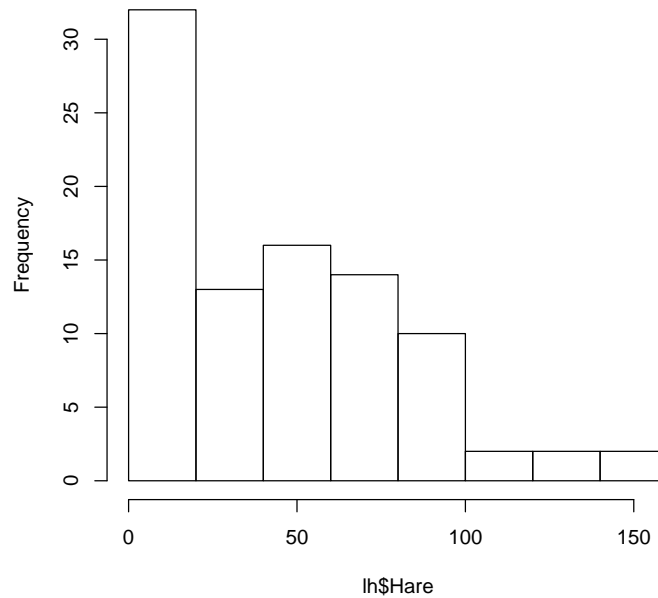
Comment faire pour calculer le résumé statistique suivant :

```
      t           Hare           Lynx
Min.  :1845   Min.   : 1.80   Min.   : 3.19
1st Qu.:1868   1st Qu.: 12.73  1st Qu.:11.84
Median :1890   Median : 40.97  Median :29.59
Mean   :1890   Mean   : 45.41  Mean   :28.34
3rd Qu.:1912   3rd Qu.: 71.41  3rd Qu.:42.52
Max.   :1935   Max.   :152.65  Max.   :79.35
```

Réponse :

Comment faire pour obtenir le graphique suivant :

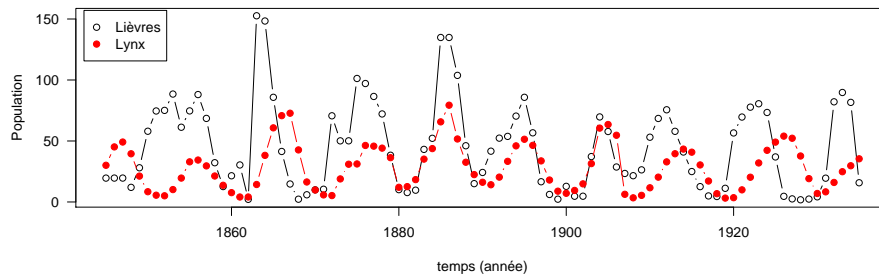
Histogram of lh\$Hare



Réponse :

Comment faire pour obtenir le graphique suivant :

Evolution des effectifs des populations de lièvres et de lynx



Réponse :

Décrivez l'évolution des effectifs des populations de lièvres et de lynx.

Réponse :

Le modèle que vous avez étudié dans la partie modélisation est-il à votre avis compatible avec les observations sur les lièvres et les lynx ?

Réponse :