Fiche de Biostatistique

Exercices d'Algèbre

Solutions proposées par C. BAJARD et S. CHARLES

Plan

Indépendance, générateur, dimension, bases

? Dans un espace vectoriel E, si **a**, **b**, **c** et **d** sont des vecteurs indépendants, alors **a** - **b**, **b** - **c**, **c** - **d** et **d** - **a** sont des vecteurs indépendants.

FAUX

(**a** – **b**) + (**b** – **c**) + (**c** - **d**) + (**d** – **a**) = **0**.

? Dans $\mathbb{R}^4$, les vecteurs (2, 14, -34, 7), (1, 4, -5, 2) et (1, 2, 3, 1) engendrent un sous-espace vectoriel de dimension 2.

VRAI

$$\mathrm{rg}\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 14 & 4 & 2 \\ -34 & -5 & 3 \\ 7 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{\vec{a} \quad \vec{b} \quad \vec{c}} = \mathrm{rg}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & -5 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & -11 & -55 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\vec{a}'=\vec{c} \quad \vec{b}'=\vec{b}-2\vec{c} \quad \vec{c}'=\vec{a}-7\vec{c}} = \mathrm{rg}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & -11 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\vec{a}' \quad \vec{b}' \quad \vec{c}''=\vec{c}'-5\vec{b}'} = 2$$

Les vecteurs $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ engendrent un sous-espace de dimension 2. Nous avons utilisé ici la triangulation de la matrice dont les colonnes sont les vecteurs $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, et le fait qu'on ne change pas un sous-espace vectoriel engendré en :

1. Permutant les vecteurs ;
2. Multipliant un vecteur par un scalaire non nul ;
3. Remplaçant un vecteur par une combinaison linéaire des autres vecteurs.

? Dans un espace vectoriel E, si **a** et **b** sont des vecteurs indépendants et si **a** et **c** sont des vecteurs indépendants, alors **a**, **b** et **c** sont des vecteurs indépendants.

FAUX

Si on prend par exemple **a** = (1,0), **b** = (0,1) et **c** = (1,-1). Alors **a** et **b** sont indépendants, **a** et **c** sont indépendants, mais **a** = **b** + **c** donc {**a**, **b**, **c**} est liée.

Remarque : comme on a pris **a**, **b** et **c** dans le plan, on sait immédiatement qu'ils sont liés.

? Un espace vectoriel ne peut pas être constitué d'un nombre fini d'éléments.

FAUX

$E=\{\vec{0}\}$ est un e.v. avec un nombre fini d'éléments.

Remarque : C'est le seul exemple parmi les e.v. sur un corps K infini, car si $\vec{x}\in E$ et $\vec{x}\neq\vec{0}$, alors $\forall\lambda\in K, \lambda\vec{x}\in E$.

? Les fonctions de [0,1] dans [0,1] forment un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

FAUX

Si on prend par exemple $f:[0,1]\to[0,1]$ définie par $f(x)=1/2$, alors la fonction $3f$ n'est pas une fonction de [0,1] dans [0,1] : $(3f)(x)=3/2$.

? On note E l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3. E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Dans E, un polynôme et sa dérivée forment toujours un système libre.

FAUX

Le polynôme nul ou les polynômes constants ont pour polynôme dérivé le polynôme nul. Un polynôme constant forme donc un système lié avec sa dérivée.

? Les vecteurs colonnes de la matrice $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 & 1 & 13 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & -1 & 15 \\ 4 & -2 & 3 & 9 & 7 & 17 \\ 2 & -3 & 4 & 5 & 22 & 23 \end{bmatrix}$ sont indépendants.

FAUX : Ce sont 6 vecteurs de $\mathbb{R}^4$.

Méthode du pivot

Donner la dimension et une base des sous-espaces engendrés par les vecteurs colonnes des matrices :

$$(a)\begin{bmatrix}1 & 5 & -1 & 0\\ 2 & 6 & -3 & 4\\ 2 & 6 & 4 & 3\\ 1 & 5 & 0 & -1\end{bmatrix} \quad (b)\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\ -5 & -1 & 3\\ 3 & 1 & 1\\ 10 & 3 & 1\end{bmatrix} \quad (c)\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\ 2 & 6 & 4\\ 5 & 5 & 0\\ -1 & -6 & -2\end{bmatrix} \quad (d)\begin{bmatrix}2 & 1 & 3 & 2\\ 0 & 2 & 1 & 4\\ 4 & -2 & 3 & 9\\ 2 & -3 & 4 & 5\end{bmatrix}$$

$$(a)\quad \mathrm{rg}\begin{pmatrix}1 & 5 & -1 & 0\\ 2 & 6 & -3 & 4\\ 2 & 6 & 4 & 3\\ 1 & 5 & 0 & -1\end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix}1 & 5 & -1 & 1\\ 2 & 26 & -3 & 6\\ 2 & 21 & 4 & 5\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix}1 & 5 & 1 & 9\\ 2 & 26 & 4 & 39\\ 2 & 21 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix}1 & 5 & 1 & 9\\ 2 & 26 & 4 & 39\\ 2 & 21 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = 4$$

$\mathbf{a}$	$\mathbf{a' = a}$	$\mathbf{a'' = a'}$	$\mathbf{a''' = a''}$
$\mathbf{b}$	$\mathbf{b' = b + 5c}$	$\mathbf{b'' = b'}$	$\mathbf{b''' = b''}$
$\mathbf{c}$	$\mathbf{c' = c}$	$\mathbf{c'' = (4c' - b' + d')/{-4}}$	$\mathbf{c''' = c''}$
$\mathbf{d}$	$\mathbf{d' = d + a}$	$\mathbf{d'' = 4d' - 5c'}$	$\mathbf{d''' = 39d'' - 4c''}$

Les quatre vecteurs colonnes forment une base.

$$(\mathrm{b})\quad \mathrm{rg}\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ -5 & -1 & 3\\ 3 & 1 & 1\\ 10 & 3 & 1\end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix}3 & 4 & 4\\ 3 & 5 & 5\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix} = 2$$

Le sous-espace engendré par les vecteurs colonnes est de dimension 2 ; une base possible est formée des vecteurs $(3,3,1,1,)$ et $(4,5,1,0)$.

$\mathbf{a}$	$\mathbf{a' = c}$
$\mathbf{b}$	$\mathbf{b' = (b - 3c)/{-2}}$
$\mathbf{c}$	$\mathbf{c' = (a - 10c)/{-7}}$

$$(\mathrm{c})\quad \mathrm{rg}\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 2 & 6 & 4\\ 5 & 5 & 0\\ -1 & -6 & -2\end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix}1 & -3 & 0\\ 2 & -6 & 0\\ 5 & 5 & 1\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix}1 & -3 & 1\\ 2 & -6 & 2\\ 5 & 5 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix} = 3$$

$\mathbf{a}$	$\mathbf{a' = a}$	$\mathbf{a'' = a'}$
$\mathbf{b}$	$\mathbf{b' = b - 3c}$	$\mathbf{b'' = b'}$
$\mathbf{c}$	$\mathbf{c'} = (\mathbf{c}\text{-}2\mathbf{a})/{-10}$	$\mathbf{c''} = (\mathbf{c'}-5\mathbf{b'})/15$

Les trois vecteurs colonnes forment une base.

$$(d)\quad \mathrm{rg}\begin{pmatrix}2&1&3&2\\0&2&1&4\\4&-2&3&9\\2&-3&4&5\end{pmatrix}=\mathrm{rg}\begin{pmatrix}1&3&-1&2\\0&-4&1&1\\2&1&-5&2\\1&0&0&0\end{pmatrix}=\mathrm{rg}\begin{pmatrix}1&3&14&-4\\0&-4&-19&9\\2&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}=\mathrm{rg}\begin{pmatrix}1&3&14&50\\0&-4&-19&0\\2&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}=4$$

$\mathbf{a}$	$\mathbf{a}' = \mathbf{a}/2$	$\mathbf{a}'' = \mathbf{a}'$	$a''' = \mathbf{a}''$
$\mathbf{b}$	$\mathbf{b}' = -d + 5a'$	$\mathbf{b}'' = \mathbf{b}'$	$b''' = \mathbf{b}''$
$\mathbf{c}$	$\mathbf{c}' = c - 4a'$	$\mathbf{c}'' = c' + 5b'$	$c''' = \mathbf{c}''$
d	$d' = (\mathbf{b}+3a')/2$	$d'' = d' - 2b'$	$d''' = 19d'' + 9\mathbf{c}''$

Les quatre vecteurs colonnes forment une base.

? La matrice $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-2&0&1&2&-1\\0&-2&1&-1&2\\-2&1&2&-1&0\\1&0&2&-2&-1\\-1&2&-2&0&1\end{bmatrix}$ est inversible.

<u>FAUX</u>

Il existe un vecteur $\vec{u}\neq\vec{0}$ tel que $\mathbf{A}\vec{u}=\vec{0}$; en effet, le vecteur $\vec{u}=(1,1,1,1,1)$ convient. Par conséquent, la matrice $\mathbf{A}$ n'est pas inversible.

Produits scalaires

? Dans un espace euclidien $\|v+w\|^2+\|v-w\|^2=2\|v\|^2+2\|w\|^2$ n'est vrai que si v et w sont orthogonaux.

FAUX

C'est vrai tout le temps car :

$$\|v+w\|^2=\langle v+w|v+w\rangle=\langle v|v\rangle+\langle w|w\rangle+2\langle v|w\rangle=\|v\|^2+\|w\|^2+2\langle v|w\rangle$$
$$\|v-w\|^2=\langle v-w|v-w\rangle=\langle v|v\rangle+\langle w|w\rangle-2\langle v|w\rangle=\|v\|^2+\|w\|^2-2\langle v|w\rangle$$
$$\Rightarrow \|v+w\|^2+\|v-w\|^2=2\|v\|^2+2\|w\|^2$$

Il s'agit ici de l'identité du parallélogramme.

? Si x et y sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et si $\|x+y\|=\|x\|+\|y\|$, alors l'un des deux vecteurs est nul.

FAUX

Dès que x et y sont positivement liés ($x=\lambda y$ avec $\lambda>0$), alors $\|x+y\|=\|x\|+\|y\|$. Par exemple, si $\lambda=1$, alors $x=y$ et $\|x+y\|=\|x+x\|=\|2x\|=2\|x\|=\|x\|+\|x\|=\|x\|+\|y\|$.

On considère dans $\mathbb{R}^3$ la fonction *h* qui, aux vecteurs $\mathbf{v}=(x_1,x_2,x_3)$ et $\mathbf{w}=(y_1,y_2,y_3)$, associe le nombre réel :

$$h(\mathbf{v},\mathbf{w})=[x_1,x_2,x_3]\begin{bmatrix}1&0&2\\0&1&0\\2&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}$$

? La fonction *h* est un produit scalaire. *Indication* : on cherchera un couple de vecteurs qui ne vérifie l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

FAUX

Prenons $\mathbf{v}=(1,0,0)$ et $\mathbf{w}=(0,0,1)$. Alors, $h(\mathbf{v},\mathbf{w})=2$, $h(\mathbf{v},\mathbf{v})=1$ et $h(\mathbf{w},\mathbf{w})=1$. Selon l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on aurait $|h(\mathbf{v},\mathbf{w})|\leq\sqrt{h(\mathbf{v},\mathbf{v})h(\mathbf{w},\mathbf{w})}$, ce qui n'est pas le cas ici.

? La fonction $w(\mathbf{x},\mathbf{y}) = [x_1,x_2,x_3]\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$ est un produit scalaire ?

Indication : on pourra utiliser la méthode de Gauss.

FAUX

Utilisons la méthode de Gauss qui consiste à écrire la forme quadratique associée à w comme une combinaison linéaire de carrés de formes linéaires sur $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} w(\mathbf{x},\mathbf{x}) &= 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 6x_2x_3 + 5x_2^2 + 2x_3^2 \\ &= 2\left(x_1 + \frac{x_2}{2}\right)^2 - \frac{x_2^2}{2} + 6x_2x_3 + 5x_2^2 + 2x_3^2 \\ &= 2\left(x_1 + \frac{x_2}{2}\right)^2 + \frac{9x_2^2}{2} + 6x_2x_3 + 2x_3^2 \\ &= 2\left(x_1 + \frac{x_2}{2}\right)^2 + \frac{9}{2}\left(x_2^2 + \frac{4}{3}x_2x_3 + \frac{4}{9}x_3^2\right) \\ &= 2\left(x_1 + \frac{x_2}{2}\right)^2 + \frac{9}{2}\left(x_2 + \frac{2}{3}x_3\right)^2 \end{aligned}$$

La signature de la forme quadratique associée à w est donc $(2,0)$, alors que si w était un produit scalaire cette signature serait égale à $(3,0)$.

? La fonction $g(\mathbf{x},\mathbf{y}) = [x_1,x_2,x_3]\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$ est un produit scalaire ?

FAUX

$$\det(\mathbf{W} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\left[(2-\lambda)(1-\lambda)-1\right] - (1-\lambda) = \lambda(\lambda-1)(\lambda-3)$$

g est symétrique, mais ses valeurs propres sont donc 0, 1 et 3 : ce n'est pas un produit scalaire.

RAPPEL : La matrice d'un produit scalaire doit être symétrique et à valeurs propres strictement positives.

? Si l'inverse d'une matrice carrée est égale à sa transposée, ses colonnes forment une base orthonormée pour le produit scalaire canonique.

VRAI

Soit $\mathbf{M} = \left[X_1 \,\vdots\, \ldots \,\vdots\, X_n \right]$. $\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{M}^{\,t} \Leftrightarrow \mathbf{M}^{\,t}\mathbf{M} = \mathbf{I}$. Ainsi :

$$\mathbf{M}^{\,t}\mathbf{M} = \begin{bmatrix} X_1^t \\ \cdots \\ \ldots \\ \cdots \\ X_n^t \end{bmatrix} \left[X_1 \,\vdots\, \ldots \,\vdots\, X_n \right] = \left[X_i^t X_j \right]_{i,j=1,n} \text{ et } \left[X_i^t X_j \right]_{i,j=1,n} = \mathbf{I} \Leftrightarrow X_i^t X_j = \delta_{ij}$$

On rappelle que ${}^t X_i X_j = \left\langle \vec{x}_i \middle| \vec{x}_j \right\rangle$. δ_{ij} est le symbole de Kronecker.

On en déduit donc que les vecteurs colonnes de **M** sont orthogonaux et unitaires : ils forment bien une base orthonormée.

Remarque : Une matrice dont l'inverse est égale à sa transposée est une matrice orthonormée, *i.e.*, une matrice dont les vecteurs colonnes sont orthogonaux deux à deux et de norme 1.

? Une base orthonormale pour un produit scalaire donné est orthogonale pour tous les autres produits scalaires.

FAUX

Prenons par exemple $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

C'est une matrice symétrique dont les valeurs propres sont 1 et 4 : c'est la matrice d'un produit scalaire. Considérons la base canonique de $\mathbb{R}^2$, orthonormée pour le produit scalaire canonique.

$$\left\langle \vec{e}_1 \middle| \vec{e}_2 \right\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{M} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$$

La base canonique n'est pas orthogonale pour le produit scalaire de matrice **M**.

? Si $\mathrm{s}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{x}^t\mathbf{A}\mathbf{y}$ est un produit scalaire de $\mathbb{R}^3$, alors la matrice **A** est inversible et la fonction $\mathrm{t}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{x}^t\mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}$ est un produit scalaire.

VRAI

Puisque **A** est la matrice d'un produit scalaire ses valeurs propres sont toutes strictement positives, son déterminant est donc non nul, elle est inversible.

Vérifions si t satisfait les propriétés qui définissent un produit scalaire :

1. t est bilinéaire (évident) ;

2. t est symétrique car $\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{t} = \left(\mathbf{A}^{t}\right)^{-1} \underbrace{=}_{\mathbf{A}\text{ est symétrique}} \mathbf{A}^{-1}$.

3. t est positive car :

$$\mathrm{t}(\mathbf{x},\mathbf{x}) = \mathbf{x}^{\mathrm{t}}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x} = \mathbf{x}^{\mathrm{t}}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x} = \left(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}\right)^{\mathrm{t}}\mathbf{A}\left(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}\right) = \mathrm{s}\left(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}, \mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}\right) \underbrace{\geq}_{\substack{\text{s est un}\\ \text{produit scalaire}}} 0$$

4. t est définie car :

$$\mathrm{t}(\mathbf{x},\mathbf{x}) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{s}\left(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}, \mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}\right) = 0 \underbrace{\Leftrightarrow}_{\substack{\text{s est un}\\ \text{produit scalairë}}} \mathbf{A}^{-1}\mathbf{x} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x} = \mathbf{A}0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = 0$$

Orthonormalisation

> En partant de la base canonique et en utilisant l'orthonormalisation de Gram-Schmidt, donner une base orthonormée pour le produit scalaire défini par :
> $$\Psi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$
> $$(\mathbf{x},\mathbf{y}) \quad \mapsto \Psi(\mathbf{x},\mathbf{y}) = (x_1 - 2x_2)(y_1 - 2y_2) + x_2 y_2 + (x_2 + x_3)(y_2 + y_3)$$

✷ Ψ est bien un produit scalaire car elle est bilinéaire symétrique (évident) ; Ψ est aussi positive car $\Psi(\mathbf{x},\mathbf{x}) = (x_1 - 2x_2)^2 + x_2^2 + (x_2 + x_3)^2 \geq 0$, et définie car

$$\Psi(\mathbf{x},\mathbf{x}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 0$$

✷ On cherche ensuite une base $\{\vec{f}_i\}$ à partir de la base canonique $\{\vec{e}_i\}$ tels que pour tout $p \in [1,n]$ $vect(\vec{f}_1,\ldots,\vec{f}_p) = vect(\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_p)$. Cette condition assure l'existe d'au moins une base $\{\vec{f}_i\}$. Si on impose par ailleurs que $\langle \vec{e}_i | \vec{f}_i \rangle > 0$, alors la base des $\{\vec{f}_i\}$ devient unique.

- $\vec{f}_1 = \vec{e}_1 = (1,0,0)$

- On cherche $\vec{f}_2$ orthogonal à $\vec{f}_1$, comme la projection orthogonale de $\vec{e}_2$ sur $vect(\vec{f}_1)$: $\vec{f}_2 = \vec{e}_2 - \lambda \vec{f}_1$ et $\Psi(\vec{f}_2, \vec{f}_1) = 0$:

  $$\Psi(\vec{f}_2,\vec{f}_1) = 0 \Leftrightarrow \Psi(\vec{e}_2,\vec{f}_1) - \lambda \Psi(\vec{f}_1,\vec{f}_1) = 0 \Leftrightarrow -2 - \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2 \ : \ \vec{f}_2 = (2,1,0).$$

- On cherche $\vec{f}_3$ comme la projection orthogonale de $\vec{e}_3$ sur $vect(\vec{f}_1,\vec{f}_2)$:

  $\vec{f}_3 = \vec{e}_2 - \lambda \vec{f}_1 - \mu \vec{f}_2$, $\Psi(\vec{f}_3,\vec{f}_1) = 0$ et $\Psi(\vec{f}_3,\vec{f}_2) = 0$

  $$\Psi(\vec{f}_3,\vec{f}_1) = 0 \Leftrightarrow \Psi(\vec{e}_2,\vec{f}_1) - \lambda \Psi(\vec{f}_1,\vec{f}_1) - \mu \Psi(\vec{f}_2,\vec{f}_1) = 0 \Leftrightarrow 0 - \lambda - 0 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$$

  $$\Psi(\vec{f}_3,\vec{f}_2) = 0 \Leftrightarrow \Psi(\vec{e}_2,\vec{f}_{21}) - \lambda \Psi(\vec{f}_1,\vec{f}_2) - \mu \Psi(\vec{f}_2,\vec{f}_{21}) = 0 \Leftrightarrow 1 - 0 - 2\mu = 0 \Leftrightarrow \mu = 1/2$$

  On en déduit que $\vec{f}_3 = (-1,-1/2,1)$. En normalisant les trois vecteurs $\vec{f}_i$, on répond finalement à la question posée :

  $$\vec{f}_1 = (1,0,0) \qquad \vec{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(2,1,0) \qquad \vec{f}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,-1/2,1)$$

En partant de la base et en utilisant l'orthonormalisation de Gram-Schmidt :

$$\mathbf{f}_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix} \quad \mathbf{f}_2 = \begin{bmatrix}1\\3\\1\\0\end{bmatrix} \quad \mathbf{f}_3 = \begin{bmatrix}3\\2\\1\\0\end{bmatrix} \quad \mathbf{f}_4 = \begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix}$$

donner une base orthonormée pour le produit scalaire canonique.

On utilise la même méthode que dans la question précédente. Cette fois on cherche une base $\{\vec{g}_i\}$ à partir de la base $\{\vec{f}_i\}$ tels que pour tout $p \in [1,n]$ $vect(\vec{g}_1,\ldots,\vec{g}_p) = vect(\vec{f}_1,\ldots,\vec{f}_p)$.

- $\vec{g}_1 = \vec{f}_1 = (1,0,1,0)$ et $\|\vec{g}_1\| = \sqrt{2}$
- $\vec{g}_2 = \vec{f}_2 - \lambda\vec{g}_1$ et $\langle \vec{g}_2 | \vec{g}_1 \rangle = 0$:

  $\langle \vec{g}_2|\vec{g}_1\rangle = 0 \Leftrightarrow \langle \vec{f}_2|\vec{g}_1\rangle - \lambda\langle \vec{g}_1|\vec{g}_1\rangle = 0 \Leftrightarrow 2-2\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$: $\vec{g}_2 = (0,3,0,0)$ et $\|\vec{g}_2\| = 3$.
- $\vec{g}_3 = \vec{f}_3 - \lambda\vec{g}_1 - \mu\vec{g}_2$, $\langle \vec{g}_3|\vec{g}_1\rangle = 0$ et $\langle \vec{g}_3|\vec{g}_2\rangle = 0$:

  $\langle \vec{g}_3|\vec{g}_1\rangle = 0 \Leftrightarrow \langle \vec{f}_3|\vec{g}_1\rangle - \lambda\langle \vec{g}_1|\vec{g}_1\rangle - \mu\langle \vec{g}_2|\vec{g}_1\rangle = 0 \Leftrightarrow 4-2\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2$

  $\langle \vec{g}_3|\vec{g}_2\rangle = 0 \Leftrightarrow \langle \vec{f}_3|\vec{g}_2\rangle - \lambda\langle \vec{g}_1|\vec{g}_2\rangle - \mu\langle \vec{g}_2|\vec{g}_2\rangle = 0 \Leftrightarrow 6-9\mu = 0 \Leftrightarrow \mu = 2/3$

  $\vec{g}_3 = (1,0,-1,0)$ et $\|\vec{g}_3\| = \sqrt{2}$
- $\vec{g}_4 = \vec{f}_4 - \lambda\vec{g}_1 - \mu\vec{g}_2 - \gamma\vec{g}_3$, $\langle \vec{g}_4|\vec{g}_1\rangle = 0$, $\langle \vec{g}_4|\vec{g}_2\rangle = 0$ et $\langle \vec{g}_4|\vec{g}_3\rangle = 0$:

  $\langle \vec{g}_4|\vec{g}_1\rangle = 0 \Leftrightarrow \langle \vec{f}_4|\vec{g}_1\rangle - \lambda\langle \vec{g}_1|\vec{g}_1\rangle - \mu\langle \vec{g}_2|\vec{g}_1\rangle - \gamma\langle \vec{g}_3|\vec{g}_1\rangle = 0 \Leftrightarrow 1-2\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1/2$

  $\langle \vec{g}_4|\vec{g}_2\rangle = 0 \Leftrightarrow \langle \vec{f}_4|\vec{g}_2\rangle - \lambda\langle \vec{g}_1|\vec{g}_2\rangle - \mu\langle \vec{g}_2|\vec{g}_2\rangle - \gamma\langle \vec{g}_3|\vec{g}_2\rangle = 0 \Leftrightarrow 0-3\mu = 0 \Leftrightarrow \mu = 0$

  $\langle \vec{g}_4|\vec{g}_3\rangle = 0 \Leftrightarrow \langle \vec{f}_4|\vec{g}_3\rangle - \lambda\langle \vec{g}_1|\vec{g}_3\rangle - \mu\langle \vec{g}_2|\vec{g}_3\rangle - \gamma\langle \vec{g}_3|\vec{g}_3\rangle = 0 \Leftrightarrow -1-2\gamma = 0 \Leftrightarrow \gamma = -1/2$

  $\vec{g}_4 = (0,0,0,1)$ et $\|\vec{g}_4\| = 1$

En normalisant les quatre vecteurs $\vec{g}_i$, on répond finalement à la question posée :

$$\vec{h}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1,0) \quad \vec{h}_2 = (0,1,0,0) \quad \vec{h}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1,0) \quad \vec{h}_4 = (0,0,0,1)$$

? $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ et $\mathbf{e}_3$ désignent les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$, muni du produit scalaire canonique. L'angle entre $\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3$ et son projeté orthogonal sur le plan $(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2)$ vaut $\pi/4$.

FAUX

$\cos(\vec{u},\vec{v}) = \dfrac{\langle \vec{u} | \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}$ et $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Or $p^{\perp}_{\{\vec{e}_1,\vec{e}_2\}}(\vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3) = \vec{e}_1+\vec{e}_2$, donc :

$$\cos(\vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3, \vec{e}_1+\vec{e}_2) = \frac{\langle \vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3 | \vec{e}_1+\vec{e}_2 \rangle}{\|\vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3\| \|\vec{e}_1+\vec{e}_2\|} = \frac{1+1}{\sqrt{3}\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

? Si f est un projecteur orthogonal de E = $\mathbb{R}^n$, il existe une base pour laquelle sa matrice ne contient que des valeurs égales à 0 ou à 1.

VRAI

Soit f un projecteur orthogonal sur F parallèlement à $\mathrm{F}^{\perp}$. Comme E est de dimension finie, on a $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{F}^{\perp}$. Considérons une base de F que l'on complète en une base de E par une base de $\mathrm{F}^{\perp}$. Alors, dans cette base, la matrice de f s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I}_p & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \text{ avec } p = \mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{F})$$

? Si f est un endomorphisme de E = $\mathbb{R}^n$ et si p est son rang, il existe une base pour laquelle sa matrice comporte p colonnes de 0.

FAUX

Compte tenu de la question précédente, la matrice comporte en fait n - p colonnes de 0.

? Si ϕ est un produit scalaire de E = $\mathbb{R}^n$, il existe une base pour laquelle sa matrice est la matrice identité.

VRAI

D'après le théorème d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

Applications linéaires, matrices, inverse, projecteurs

E est l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, {e} est la base canonique de E. E est muni du produit scalaire canonique. On note **a**, **b** et **c** les trois vecteurs définis dans {e} par les colonnes de **H**. Une matrice **A** et la matrice **H** sont définies par :

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Soit f l'application linéaire de E dans E définie par :

$$\mathbf{u} = (x, y, z) \mapsto f(\mathbf{u}) = \left(x/\sqrt{3} + y/\sqrt{3} + z/\sqrt{3}, -x/\sqrt{2} + y/\sqrt{2}, -x/\sqrt{6} - y/\sqrt{6} + 2z/\sqrt{6}\right)$$

? La matrice de f dans la base canonique est **H**.

__FAUX__ : $f(e_1) = \left(1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{6}\right)$. La matrice de f dans la base canonique est $\mathbf{H}^t$.

? La matrice **H** est la matrice d'un produit scalaire.

__FAUX__ : $\mathbf{H}^t \neq \mathbf{H}$

? La matrice **A** est la matrice d'un produit scalaire.

__FAUX__ : car **A** est symétrique mais possède une valeur propre nulle.

? L'opérateur associé à **H** est un projecteur.

__FAUX__ : $\mathbf{H}^2 = \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{2} - \sqrt{3} - 1}{3\sqrt{2}} & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \neq \mathbf{H}$

? Les vecteurs **a**, **b** et **c** forment une base orthonormée de E.

__VRAI__ : pour le produit scalaire canonique car :

$$\|\mathbf{a}\| = \|\mathbf{b}\| = \|\mathbf{c}\| = 1, \text{ et } \langle \mathbf{a} | \mathbf{b} \rangle = \langle \mathbf{a} | \mathbf{c} \rangle = \langle \mathbf{b} | \mathbf{c} \rangle = 0$$

? L'opérateur associé à **H** est bijectif.

VRAI : **H** est inversible car ses colonnes forment une base orthonormée (voir ci-dessus).

? Le projecteur orthogonal sur le sous-espace vectoriel engendré par **a** et **b** a pour matrice **A** par rapport à une base convenablement choisie.

VRAI

Soit p le projecteur orthogonal sur le sous-espace vectoriel engendré par **a** et **b**. Puisque $\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\}$ est une base orthonormée : $p(\mathbf{a})=\mathbf{a}$, $p(\mathbf{b})=\mathbf{b}$ et $p(\mathbf{c})=0$. Ainsi, **A** est bien la matrice de p dans la base $\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\}$.

? L'opérateur associé à **A** est le projecteur orthogonal sur le sous-espace vectoriel engendré par **c**.

FAUX : Car $\mathbf{Ac}\neq\mathbf{c}$.

? La matrice $\mathbf{HAH}^{\mathrm{t}}$, où $\mathbf{H}^{\mathrm{t}}$ est la transposée de **H**, est de rang 3.

FAUX

On sait que **H** est inversible, donc $\mathbf{H}^{\mathrm{t}}$ aussi car $\left(\mathbf{H}^{\mathrm{t}}\right)^{-1}=\left(\mathbf{H}^{-1}\right)^{\mathrm{t}}$.

$\mathbf{HAH}^{\mathrm{t}}$ est du rang de $\mathbf{HA}$ qui est du rang de **A**. Donc $\mathbf{HAH}^{\mathrm{t}}$ est de rang 2.

Remarque : On ne modifie pas le rang en multipliant par une matrice inversible.

Autre méthode : **H** est la matrice de passage de la base canonique vers la base orthonormée $\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\}$, donc $\mathbf{H}^{\mathrm{t}}=\mathbf{H}^{-1}$. Ainsi $\mathbf{HAH}^{\mathrm{t}}=\mathbf{HAH}^{-1}$, *i.e.*, $\mathbf{HAH}^{\mathrm{t}}$ semblable à **A** donc de même rang 2.

? L'image et le noyau de l'opérateur associé à $\mathbf{HAH}^{\mathrm{t}}$ forment une somme directe orthogonale.

VRAI

On vérifie aisément que $\mathbf{HAH}^{\mathrm{t}}$ est un projecteur, en utilisant le fait que **A** est un projecteur :

$$\left(\mathbf{HAH}^{\mathrm{t}}\right)\left(\mathbf{HAH}^{\mathrm{t}}\right)=\mathbf{HA}\underbrace{\mathbf{H}^{-1}\mathbf{H}}_{\mathbf{I}}\mathbf{AH}^{\mathrm{t}}=\mathbf{H}\underbrace{\mathbf{A}^2}_{=\mathbf{A}}\mathbf{H}^{\mathrm{t}}=\mathbf{HAH}^{\mathrm{t}}$$

Si f est l'endomorphisme de matrice $\mathbf{HAH}^{\mathrm{t}}$, alors $\operatorname{Im} f\oplus\operatorname{Ker} f=\mathbb{R}^3$.

Remarque : Si p est un projecteur de E, pour qu'il soit orthogonal il faut qu'il vérifie que pour tout $(\vec{u},\vec{v})\in E^2$, $\langle p(\vec{u})|\vec{v}\rangle=\langle\vec{u}|p(\vec{v})\rangle$. Ainsi, pour le produit scalaire canonique dans la base canonique, si **M** est la matrice de p, alors elle est nécessairement symétrique :

$$(\mathbf{M}X)^{\mathrm{t}}Y=X^{\mathrm{t}}\mathbf{M}Y\Leftrightarrow X^{\mathrm{t}}\mathbf{M}^{\mathrm{t}}Y=X^{\mathrm{t}}\mathbf{M}Y\Leftrightarrow\mathbf{M}^{\mathrm{t}}=\mathbf{M}$$

Ici, $\left(\mathbf{HAH}^{t}\right)^{t} = \left(\mathbf{H}^{t}\right)^{t}\mathbf{A}^{t}\mathbf{H}^{t} = \mathbf{HAH}^{t}$, ce qui indique que $\mathbf{HAH}^{t}$ est un projecteur orthogonal et donc $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$ forment une somme directe orthogonale.

? La matrice $\mathbf{HA}$ peut être considérée comme la matrice d'un projecteur par rapport à deux bases convenablement choisies.

FAUX : car on vérifie aisément que $\left(\mathbf{HA}\right)^{2} \neq \mathbf{HA}$.

Donner une propriété de l'application dont la matrice dans la base $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ est $\mathbf{H}^{t}\mathbf{AH}$.

$\mathbf{H}^{t}\mathbf{AH} = \mathbf{H}^{-1}\mathbf{AH}$ dans la base $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$. Donc $\mathbf{H}^{t}\mathbf{AH}$ est semblable à $\mathbf{A}$: ces deux matrices correspondent au même endomorphisme, à savoir la projection orthogonale sur $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ parallèlement à $\vec{e}_3$.

Diagonalisation

$$\lambda = 2+\sqrt{2} \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & a & d \\ c & d & a \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

? Le vecteur **u** est un vecteur propre de la matrice **D**.

VRAI

$$\mathbf{Du} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} = 2\mathbf{u}$$

u est un vecteur propre de **D** associé à la valeur propre 2.

? Le nombre λ est une valeur propre de la matrice **D**.

VRAI

$$\det(\mathrm{D}-\lambda \mathrm{I}) = \begin{vmatrix} -1-\sqrt{2} & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -\sqrt{2} & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -\sqrt{2} & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1-\sqrt{2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1-\sqrt{2} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}+1 & \sqrt{2}+1 & 0 \\ 0 & -1 & -\sqrt{2} & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1-\sqrt{2} \end{vmatrix} = \ldots = 0$$

? Les matrices **E** et **F** sont semblables.

VRAI

E est symétrique donc diagonalisable. $\det(\mathbf{E}-\lambda \mathbf{I}) = \lambda^3 (\lambda - 4)$; Les valeurs propres de **E** sont donc les mêmes que celles de **F** : **E** et **F** sont semblables.

? Il existe des nombres réels a, b et c pour lesquels **A** n'est pas diagonalisable.

FAUX : Car **A** étant symétrique elle est toujours diagonalisable, $\forall a, b, c$.

? La matrice **B** a une valeur propre triple.

FAUX

B est symétrique donc diagonalisable. Si elle admettait une valeur propre triple λ, alors on aurait $\mathbf{B} = \mathbf{P}(\lambda\mathbf{I})\mathbf{P}^{-1} = \lambda\mathbf{I}$, ce qui est faux.

? La matrice **C** est diagonalisable.

FAUX

Si **C** était diagonalisable, alors elle aurait une seule valeur propre triple 0, et on aurait $\mathbf{C} = \mathbf{P}(0\mathbf{I})\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{0}$, ce qui est faux.

Autre méthode :

Si **C** était diagonalisable, alors elle aurait une seule valeur propre triple 0, et le noyau de l'endomorphisme f de matrice **C** serait de dimension 3. Or $\mathrm{CX} = 0 \Leftrightarrow \mathrm{X} = (0, 0, z)$, ce qui signifie que $\dim(\mathrm{Ker}\, f) = 1$.

? La matrice d'un produit scalaire de $\mathbb{R}^n$ est diagonalisable.

VRAI : Car la matrice d'un produit scalaire est symétrique donc toujours diagonalisable

? La somme d'une matrice carrée réelle et de sa transposée est diagonalisable.

VRAI

Car la somme d'une matrice carrée et de sa transposée est symétrique :
$(\mathbf{M} + \mathbf{M}^{\mathrm{t}})^{\mathrm{t}} = \mathbf{M}^{\mathrm{t}} + \mathbf{M} = \mathbf{M} + \mathbf{M}^{\mathrm{t}}$

? Si le produit de deux matrices carrées réelles est diagonalisable, chacune de ces deux matrices est diagonalisable.

FAUX

Par exemple, si on prend une matrice **M** quelconque non diagonalisable, alors $\mathbf{M}.\mathbf{0} = \mathbf{0}$ et la matrice nulle **0** est diagonalisable.

? La somme de deux matrices diagonalisables est diagonalisable.

FAUX

Par exemple, $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $M_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ sont diagonalisables, mais $M_1 + M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ne l'est pas.

****

Considérons maintenant la matrice et les vecteurs suivants :

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1-\sqrt{2} \\ 1+\sqrt{2} \\ -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

? **a** et **b** sont des vecteurs propres de **D**.

VRAI

$$\mathbf{Da} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1-\sqrt{2} \\ 1+\sqrt{2} \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+\sqrt{2} \\ -4-3\sqrt{2} \\ 4+3\sqrt{2} \\ -2-\sqrt{2} \end{bmatrix} = \left(2+\sqrt{2}\right)\mathbf{a}$$

$$\mathbf{Db} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} = 2\mathbf{b}$$

? La matrice **D** a 4 valeurs propres distinctes.

VRAI

$$\det\left(\mathbf{D} - \lambda \mathbf{I}\right) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \ldots = \lambda\left(\lambda-2\right)\left(\lambda^2 - 4\lambda + 2\right)$$

Les valeurs propres de **D** sont donc : $0, 2, 2+\sqrt{2}, 2-\sqrt{2}$: elles sont distinctes.

? La matrice **D** n'est pas inversible.

VRAI : Car **D** a une valeur propre nulle.

? La matrice **D** admet une base unique de vecteurs propres orthonormés.

FAUX

D étant symétrique, elle est diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres, mais cette base n'est pas unique. (Revoir les deux exercices sur l'orthonormalisation de Gram-Schmidt).

****

E est un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$. Soit f un endomorphisme sur E. Id est l'application identité.

? Si $f^2 = f$, alors f est inversible.

FAUX

Si $f^2 = f$, alors f est un projecteur. Prenons par exemple $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ défini par $f(x,y)=(x,0)$. $\forall y \in \mathbb{R}$, les vecteurs (x_0,y) ont la même image $(x_0,0)$; f n'est donc pas injective, donc pas bijective ; f n'est pas inversible.

? Si f est inversible, alors f^{-1} est diagonalisable.

FAUX

Soit f inversible. Si f^{-1} était diagonalisable, alors il existerait une base de vecteurs propres dans laquelle la matrice $\mathbf{M}^{-1}$ associée à f^{-1} dans une base quelconque serait diagonale avec $\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{PDP}^{-1} \Leftrightarrow \mathbf{M} = \left(\mathbf{PDP}^{-1}\right)^{-1} = \mathbf{PD}^{-1}\mathbf{P}^{-1}$, ce qui signifierait que f serait aussi diagonalisable.

En prenant $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, on voit que cela n'est pas toujours le cas : **M** est inversible mais non diagonalisable.

? Si f est diagonalisable, alors f est inversible.

FAUX : f = 0 est un contre-exemple.

? Si f est inversible, alors f² aussi.

VRAI

$$\left(f \circ f\right) \circ \left(f^{-1} \circ f^{-1}\right) = f \circ \left(f \circ f^{-1}\right) \circ f^{-1} = f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}$$
$$\left(f^{-1} \circ f^{-1}\right) \circ \left(f \circ f\right) = f^{-1} \circ \left(f^{-1} \circ f\right) \circ f = f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}$$

? Si f est diagonalisable, alors f² aussi.

VRAI

Soit $\left(\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_p\right)$ une base de vecteurs propres de f associée aux valeurs propres $\lambda_1,\ldots,\lambda_p$. Alors $f^2\left(\vec{u}_i\right) = f\left(\lambda_i\vec{u}_i\right) = \lambda_i f\left(\vec{u}_i\right) = \lambda_i^2\vec{u}_i$. Ainsi f² est diagonalisable dans la base $\left(\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_p\right)$ et ses valeurs propres sont celles de f élevées au carré.

? Si f² = f, alors f est diagonalisable.

VRAI

Si f² = f, alors f est un projecteur sur $\mathrm{Im}\, f$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\, f$. Dans une base de E constituée d'une base de $\mathrm{Im}\, f$ complétée d'une base de $\mathrm{Ker}\, f$, la matrice associée à f s'écrit $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_p & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ avec $p = \dim\left(\mathrm{Im}\, f\right)$. **M** donc f est diagonalisable.

? Si f² = Id, alors f est inversible.

VRAI : Si f² = Id, alors $f \circ f = \mathrm{Id}$ et donc $f^{-1} = f$.

? Si f est inversible et diagonalisable, alors f^{-1} est diagonalisable.

VRAI

Soit $\left(\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_p\right)$ une base de vecteurs propres de f associée aux valeurs propres $\lambda_1,\ldots,\lambda_p$ ($\forall i, \lambda_i \neq 0$ car f est inversible). Alors :

$$f\left(\vec{u}_i\right) = \lambda_i\vec{u}_i \Leftrightarrow \left(f^{-1} \circ f\right)\left(\vec{u}_i\right) = \lambda_i f^{-1}\left(\vec{u}_i\right) \Leftrightarrow f^{-1}\left(\vec{u}_i\right) = \frac{1}{\lambda_i}\vec{u}_i$$

f^{-1} est donc diagonalisable dans la base $\left(\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_p\right)$, et ses valeurs propres sont les inverses de celles de f.

? Le noyau de f est un sous-espace propre de f.

FAUX : sauf si $\lambda = 0$ est une valeur propre de f.

****

A est une matrice carrée réelle symétrique à p lignes et p colonnes ($p > 1$).

? **A** est toujours diagonalisable.

VRAI : car **A** est symétrique.

? **A** est toujours inversible.

FAUX : car **A** peut avoir des valeurs propres nulles. **A** = **0** est un contre-exemple.

? Le rang de **A** et celui de $\mathbf{A}^2$ sont les mêmes.

VRAI

A est diagonalisable : $\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^{-1} \Leftrightarrow \mathbf{A}^2 = \left(\mathbf{PDP}^{-1}\right)\left(\mathbf{PDP}^{-1}\right) = \mathbf{PD}^2\mathbf{P}^{-1}$. **A** et **D** sont de même rang, car ce sont deux matrices semblables. **D** et $\mathbf{D}^2$ sont de même rang car ce sont des matrices diagonales. $\mathbf{A}^2$ étant de même rang que $\mathbf{D}^2$ (matrices semblables), elle est donc de même rang que **A**.

? **A** et $\mathbf{A}^2$ ont les mêmes valeurs propres.

FAUX

D'après ce qui précède, $\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^{-1} \Leftrightarrow \mathbf{A}^2 = \mathbf{PD}^2\mathbf{P}^{-1}$, ce qui signifie que les valeurs propres de $\mathbf{A}^2$ sont celle de **A** au carrée.

? **A** et $\mathbf{A}^2$ ont les mêmes vecteurs propres.

VRAI

Toujours d'après ce qui précède, $\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^{-1} \Leftrightarrow \mathbf{A}^2 = \mathbf{PD}^2\mathbf{P}^{-1}$; la matrice de passage dans la base des vecteurs propres est donc la même pour **A** et $\mathbf{A}^2$: elles ont les mêmes vecteurs propres.

? Si $\mathbf{A}^2$ est diagonale, **A** est la matrice d'un produit scalaire.

FAUX : **A** = **0** est un contre exemple.

****

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & 1 & -6 \\ -2 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

Diagonaliser **A** si c'est possible.

$$\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(1-\lambda)(\lambda-3).$$

Les vecteurs propres associées aux trois valeurs propres sont :

$\vec{v}_1 = (1,1,1)$ pour $\lambda_1 = 0$ $\vec{v}_2 = (1,0,-1)$ pour $\lambda_2 = 1$ $\vec{v}_3 = (1,-2,1)$ pour $\lambda_3 = 3$

A est donc diagonalisable avec $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice de passage dans la base des vecteurs propres.

Diagonaliser **B** si c'est possible.

$$\det(\mathbf{B}-\lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 8 \\ 3 & 1-\lambda & -6 \\ -2 & 0 & -5-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda+1)^2.$$

Le sous-espace propre associé à $\lambda_1 = -1$ est défini par $E_{\lambda_1} = \{(-2,6,1)z / z \in \mathbb{R}\}$. Il est de dimension 1, la matrice **B** n'est donc pas diagonalisable.

? $\mathbf{BB}^t$ et $\mathbf{B}^t\mathbf{B}$ sont toutes les deux diagonalisables.

VRAI : Car $\mathbf{BB}^t$ et $\mathbf{B}^t\mathbf{B}$ sont toutes les deux symétriques.

? $\mathbf{B}+\mathbf{B}^t$ est diagonalisable.

VRAI : Car $\mathbf{B}+\mathbf{B}^t$ est symétrique.

? $\mathbf{B}^t\mathbf{AB}$ est diagonalisable.

VRAI : Car $\mathbf{B}^t\mathbf{AB}$ est symétrique, du fait que **A** est symétrique.

? **BA** est inversible.

FAUX : Car $\det(\mathbf{BA}) = \det(\mathbf{B})\det(\mathbf{A}) = 0$; en effet $\det(\mathbf{A}) = 0$ car elle possède une valeur propre nulle.

? **AB** est inversible.

FAUX : pour la même raison que précédemment.

? Une des matrices **A** ou **B** est une matrice de produit scalaire.

FAUX : **A** possède une valeur propre nulle, et **B** n'est pas symétrique.

? Les deux matrices **A** et **B** sont inversibles.

FAUX : $\det(\mathbf{A}) = 0$ donc **A** n'est pas inversible. Par contre $\det(\mathbf{B}) = 1$, donc **B** est inversible.

? Ni la matrice **A** ni la matrice **B** ne sont des matrices de projecteurs.

VRAI : car les projecteurs n'ont que 0 ou 1 comme valeurs propres.

****

On note E l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3. E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On note {e} la base formée par 1, x, x^2 et x^3 et {g} la base formée par les polynômes 1, (1-x), $(1-x)^2$ et $(1-x)^3$.

? La matrice de l'application identité de {g} dans {e} est :

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

VRAI : car les colonnes de **B** sont bien les coordonnées des vecteurs de {g} dans la base {e}.

? L'application f de E dans E qui à un polynôme associe sa dérivée est un endomorphisme de E.

VRAI : Si $P \in E$, alors $P' \in E$, et la linéarité de la dérivée des polynômes : $\left(\alpha P + \beta Q\right)' = \alpha P' + \beta Q'$, permet de conclure.

? L'application f n'a pas de vecteurs propres.

FAUX

$\mathrm{f}\left(P\right) = \lambda P \Leftrightarrow P' = \lambda P$. Si $\lambda = 0$, tout polynôme P constant convient. Or $\lambda = 0$ est bien une valeur propre de f : en effet, une même dérivée correspond à une infinité de polynôme. Ainsi, f n'est pas injective, et $\mathrm{Ker}\,\mathrm{f} \neq \{0\}$. Tout polynôme constant est donc vecteur propre de f associé à la valeur propre 0.

? La matrice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ est diagonalisable.

FAUX

Si **A** était diagonalisable, alors $\lambda = 0$ serait valeur propre de multiplicité 4, et **A** serait semblable à la matrice nulle, c'est à-dire $\mathbf{A} = \mathbf{P}\left(0\mathbf{I}\right)\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{0}$, ce qui est faux.

? La matrice **A** est une matrice de f.

VRAI : **A** est la matrice associée à f dans la base {e}.

? La matrice **B** est diagonalisable.

VRAI

B possède deux valeurs propres doubles 1 et –1. Cherchons les vecteurs propres de coordonnées (*x*, *y*, *z*, *t*).
Pour $\lambda_1 = -1$, on obtient les deux conditions $t = 0$ et $y = -z$. Ainsi, nous avons deux contraintes donc $\dim E_{-1} = 2$ et on peut prendre les vecteurs (0, 1, -1, 0) et (1, 0, 0, 0) comme base de E_{-1}.
Pour $\lambda_2 = 1$, on obtient les deux conditions $z = -\frac{3}{2}t$ et $2x + y = \frac{1}{2}t$. Ainsi, nous avons deux contraintes donc $\dim E_1 = 2$ et on peut prendre les vecteurs (0, 1, -3, 2) et (1, -1, 3, 2) comme base de E_1.
La matrice **B** est donc diagonalisable, avec comme matrice de passage dans la base des vecteurs propres :

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

? La matrice $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{AB}$ n'est pas diagonalisable.

VRAI

On fait un raisonnement par l'absurde. Si $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{AB}$ était diagonalisable, alors :

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{AB} = \mathbf{PDP}^{-1} \Leftrightarrow \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{AB} = \mathbf{DP}^{-1} \Leftrightarrow \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{ABP} = \mathbf{D} \Leftrightarrow (\mathbf{BP})^{-1}\mathbf{A}(\mathbf{BP}) = \mathbf{D}$$

Autrement dit, la matrice **A** serait diagonalisable, ce qui est faux comme on l'a vu plus haut.

? Les matrices $\mathbf{A}\,\mathbf{A}^t$ et $\mathbf{A} + \mathbf{A}^t$ sont diagonalisables.

VRAI : quelle que soit la matrice **A**.

? Si une matrice **X** est semblable à une matrice **Y** et si la matrice **Y** est semblable à une matrice **Z**, alors les matrices **X** et **Z** sont semblables.

VRAI

X semblable à **Y** : $\mathbf{X} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{YP}$, et **Y** semblable à **Z** : $\mathbf{Y} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{ZQ}$.

$$\mathbf{X} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{YP} \Leftrightarrow \mathbf{X} = \mathbf{P}^{-1}\left(\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{ZQ}\right)\mathbf{P} = \left(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{Q}^{-1}\right)\mathbf{Z}(\mathbf{QP}) = (\mathbf{QP})^{-1}\mathbf{Z}(\mathbf{QP})$$

X est donc semblable à **Z**, la matrice de passage est égal au produit **QP**.

? Si **X** et **Y** sont des matrices carrées, symétriques, réelles et si **XY** = **YX**, alors **XY** est diagonalisable.

VRAI : car **XY** est symétrique : $(\mathbf{XY})^t = \mathbf{Y}^t\mathbf{X}^t = \mathbf{YX} = \mathbf{XY}$.

****

E est l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$, {e} est sa base canonique et $\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle$ est son produit scalaire canonique. On considère la matrice **A** et *f* le $\mathbb{R}$-opérateur associé à **A** :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

? La matrice **A** est symétrique et inversible.

FAUX : **A** est symétrique mais la somme des colonnes de **A** fait 0 donc **A** n'est pas inversible.

? La dimension du noyau de *f* vaut 3.

FAUX : En observant **A**, on remarque que des vecteurs colonnes sont liés : $\vec{c}_1 = -\vec{c}_2$ et $\vec{c}_3 = -\vec{c}_4$. On en conclut que le rang de **A** est 2 ($\vec{c}_1$ et $\vec{c}_3$ sont linéairement indépendants), et donc que la dimension du noyau de *f* est 2.

? Il existe un produit scalaire de E dont la matrice par rapport à {e} est **A**.

FAUX : Car **A** est symétrique, mais comme son déterminant est nul, elle possède au moins une valeur propre nulle.

? L'application *f* est un projecteur.

FAUX : Si on essaie de calculer **A**², on constate immédiatement que le coefficient (1,1) de A² est différent de -1, $\mathbf{A}^2 \neq \mathbf{A}$.

? Les colonnes de **A** sont des vecteurs orthogonaux.

FAUX : car on a vu plus haut que $\vec{c}_1 = -\vec{c}_2$, donc si les vecteurs colonnes sont liés, ils ne peuvent pas être orthogonaux.

? L'application définie par $g(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \langle \mathbf{x} | f(\mathbf{y}) \rangle$ est bilinéaire mais non symétrique.

FAUX

g est bilinéaire par linéarité de *f* et bilinéarité du produit scalaire.

$g(\mathbf{y},\mathbf{x}) = \langle \mathbf{y} | f(\mathbf{x}) \rangle = \mathbf{Y}^t(\mathbf{AX})$.

$$\mathbf{Y}^t(\mathbf{AX}) = (\mathbf{Y}^t\mathbf{A})\mathbf{X} = (\mathbf{A}^t\ \mathbf{Y})^t\ \mathbf{X} = (\mathbf{AY})^t\ \mathbf{X}$$

$(\mathbf{AY})^t\,\mathbf{X} = \langle f(\mathbf{y}) | \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{x} | f(\mathbf{y}) \rangle = g(\mathbf{x},\mathbf{y})$

Par conséquent, *g* est symétrique.

? L'application définie par $h(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \langle f(\mathbf{x}) \| f(\mathbf{y}) \rangle$ est un produit scalaire.

FAUX

h est bilinéaire par linéarité de *f* et bilinéarité du produit scalaire.

$h(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \langle f(\mathbf{x}) | f(\mathbf{y}) \rangle = \langle f(\mathbf{y}) | f(\mathbf{x}) \rangle = h(\mathbf{y},\mathbf{x})$: *h* est symétrique

$h(\mathbf{x},\mathbf{x}) = 0 \Leftrightarrow \langle f(\mathbf{x}) | f(\mathbf{x}) \rangle = 0 \Leftrightarrow f(\mathbf{x}) = 0$. Or $\dim \mathrm{Ker}\, f = 2$ d'après ce que l'on a vu plus haut. Donc $\mathrm{Ker}\, f \neq \{\vec{0}\}$, ce qui signifie que $f(\mathbf{x}) = 0$ n'implique pas $\mathbf{x} = 0$. Par conséquent, *h* n'est pas définie, ce n'est donc pas un produit scalaire.

****

FIN