Examen de biostatistiques – L3 MIV
Session 2

M. Bailly-Bechet & H. Haned

29 juin 2010

Documents autorisés. Échanges interdits. Calculatrices inutiles mais autorisées. Les vacances sont toutes proches. Durée de l'épreuve : 1h30.

Cette épreuve est divisée en deux parties indépendantes. Les résultats proposés peuvent être employés même s'ils n'ont pas été démontrés.

1 Mélange de lois exponentielles

Soit X une variable aléatoire (v.a.) définie sur $[0, +\infty]$ suivant une loi exponentielle de paramètre a. Sa densité de probabilité est $p_a(X = x) = ae^{-ax}$, avec $a > 0$.

1. À l'aide de deux développements limités d'ordre 1, écrivez $p_a(0 + \epsilon)$, puis $p_{0+\epsilon}(x)$, avec $\epsilon \to 0$ dans les deux cas.
2. Montrez que la fonction génératrice des moments de X peut s'écrire $F(t) = \frac{1}{1-\frac{t}{a}}$, pour $t < a$.
3. *À partir de cette formule*, redémontrez que l'espérance et la variance d'une loi exponentielle de paramètre a sont respectivement $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{a^2}$.

On considère maintenant une autre v.a. Y, qui suit une loi dite de mélange ; en effet la densité de probabilité de Y est la somme de deux densités exponentielles. On a :

$$p(Y = y) = \alpha a e^{-ay} + \beta b e^{-by} \tag{1}$$

4. Sous quelle condition cette loi est bien celle d'une densité de probabilité ?
5. Donnez une expression de l'espérance et de la variance de Y en fonction de a, b, α, β.

2 Test clinique

Une entreprise pharmaceutique procède à un test clinique pour un nouveau médicament contre les migraines chroniques. Ce test est conduit ainsi : on prend un échantillon de n personnes que l'on traite, et on mesure la fréquence p_{obs} de leurs migraines journalières. On va ensuite la comparer à la fréquence théorique dans la population $p^{\star}$. On rappelle que la statistique du test est, pour un échantillon de taille n :

$$\epsilon_{obs} = \frac{p^{\star} - p_{obs}}{\sqrt{\frac{p^{\star}(1-p^{\star})}{n}}} \tag{2}$$

Les hypothèses testées dans ce cas sont :
H_0 : la fréquence observée dans l'échantillon est égale à la fréquence théorique dans la population.
H_1 : la fréquence observée dans l'échantillon est inférieure à la fréquence théorique dans la population.

1. Ce test est-il unilatéral ou bilatéral ? Pourquoi l'autre test n'aurait-il "pas d'intérêt" ici ?
2. Si H_0 est vraie, ϵ_{obs} suit une loi normale centrée réduite. Expliquez pourquoi.
3. On supposera pour la suite que $p^{\star} = 0.5$ et $n = 16$. On fixe $\epsilon_{\alpha} = 2$. Montrez que la valeur seuil de p_{obs} en-dessous de laquelle on rejettera H_0 au risque α est $p_c = 0.25$.
4. Les résultats de l'étude donnent $p_{obs} = 0.4$, ce qui n'est pas suffisant pour rejeter H_0. Quel nombre de participants n aurait-il fallu que l'étude contienne pour que cette valeur soit suffisante, avec le même risque α ?
5. Quelles critiques méthodologiques de fond pourrait-on faire sur cette étude ?