Biostatistiques MIV
TD 1 : Développements limités, espérance et moments

M. Bailly-Bechet

13 juillet 2010

1 Développements limités

On rappelle que $\frac{d\cos(x)}{dx} = -\sin(x)$ et $\frac{d\sin(x)}{dx} = \cos(x)$.

1. Écrivez le développement limité à l'ordre 6 de $\sin(x)$ en 0.
2. Faîtes de même pour $\cos(x)$.
3. Pouvez vous généraliser les deux formules précédentes sans calcul ?
4. Comparez les deux formules précédentes au DL de $\exp(x)$.
5. Retrouvez par cette méthode la formule $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$.

2 Moment et espérance

1. Calculez l'espérance et la variance d'une v.a de loi exponentielle $P(X = x) = \theta e^{-\theta x}$ définie sur $\mathbb{R}^+$.
2. À partir de la fonction génératrice des moments, calculez les moments d'ordre 3 et 4 d'une loi normale quelconque. Ôtez leur respectivement $\mathbb{E}^3(X)$ et $\mathbb{E}^4(X)$. Que remarquez-vous ?

2.1 Indépendance

Question préparatoire X et Y sont deux variables aléatoires discrètes indépendantes, suivant respectivement des lois de probabilités $p(X = x)$ et $q(Y = y)$. Rappelez la définition de l'espérance $\mathbb{E}(X)$.

Démontrez que :

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \tag{1}$$

Question d'examen Biostatistiques MIV 2009 Soient deux variables aléatoires discrètes *non indépendantes*, X et Y. La valeur de Y est dépendante de celle de X ; en effet on a :

$$X = 0 \qquad p(X=0) = \tfrac{1}{2} \tag{2}$$
$$X = 1 \qquad p(X=1) = \tfrac{1}{2} \tag{3}$$
$$Y = -1 \quad \begin{cases} p(Y=-1|X=0) = \frac{2}{3} \\ p(Y=-1|X=1) = \frac{1}{3} \end{cases} \tag{4}$$
$$Y = 1 \quad \begin{cases} p(Y=1|X=0) = \frac{1}{3} \\ p(Y=1|X=1) = \frac{2}{3} \end{cases} \tag{5}$$

On rappelle la formule de l'espérance d'une variable aléatoire Y conditionnée à une autre v.a. X :

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{X=x} p(x) \left(\sum_{Y=y} yp(y|x) \right) \tag{6}$$

1. Démontrer que $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{E}(Y) = 0$.
2. Écrivez la table des valeurs de la v.a. $X+Y$, c'est à dire l'ensemble de toutes les valeurs possibles de $X+Y$ et la probabilité associée.
3. Calculer $\mathbb{E}(X+Y)$. À-t-on l'égalité $\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$? Celle-ci serait-elle vraie si les variables X et Y étaient indépendantes ?
4. De la même façon, calculer $\mathbb{E}(XY)$. À-t-on l'égalité $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$?

2.2 Loi du χ^2 – Examen Biostatistiques MIV 2009

On définit une v.a. du χ^2 à n degrés de liberté comme :

$$\chi^2_n = \sum_{i=1}^{n} u_i^2, \tag{7}$$

où chaque u_i est une v.a. normale centrée réduite (i.e suivant une loi normale de moyenne 0 et d'écart-type 1) indépendante des autres.

1. Soit X une variable aléatoire du χ^2 à n degrés de liberté et Y une variable aléatoire du χ^2 à p degrés de liberté. Ces deux variables sont indépendantes. Quelle loi suit la variable aléatoire $X+Y$? Démontrez votre réponse.
2. Démontrez que l'espérance d'une v.a. du χ^2 à 1 degré de liberté vaut 1 (on rappelle la formule de l'intégration par parties : $\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'$).
3. Que pouvez-vous en déduire sur l'espérance d'une v.a. du χ^2 à n degrés de liberté ? Il n'est pas nécessaire de démontrer ce résultat, une justification suffira.