Fiche TD avec le logiciel R : bem10

Modèles discrets - Populations structurées

Sandrine Charles et Sylvain Mousset

Les matrices de Leslie. Un modèle avec deux classes d'âge. Un modèle avec deux catégories de population. Un modèle matriciel complexe.

Table des matières

1 Modèle simple de Leslie

1.1 Introduction

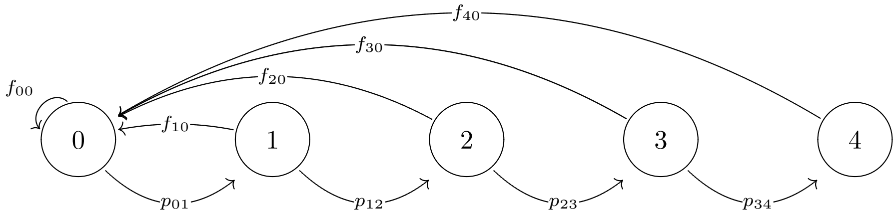
Écureuil roux *Sciurus vulgaris*. Source : Wikipedia

On étudie une cohorte (ensembe d'individus du même âge) de 500 écureuils durant cinq années. Chaque année on note le nombre d'individus vivants de cette cohorte ainsi que l'effectif moyen de la progéniture obtenue cette année là par individu de la cohorte. On obtient les résultats suivants :

Tab. 1 – Suivi d'une cohorte de 500 écureuils

Année	Survivants	Progéniture
0	500	0
1	400	2
2	200	3
3	50	1
4	0	0

On peut schématiser le cycle de vie des écureuils par le diagramme ci-dessous.

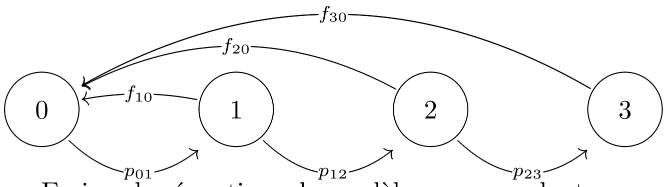


Que désignent les paramètres p_{ij} et f_{i0} du diagramme ci-dessus ?

Calculez les valeurs de ces paramètres d'après la table 1.1.

On note $u_j^{(i)}$ le nombre d'écureuils de la classe d'âge i l'année j, écrivez les équations de récurrence du modèle.

Montrez que ce modèle peut se simplifier sous la forme du diagramme ci-dessous en n'étudiant que quatre classes d'âge.



Ecrivez les équations du modèle correspondant.

Une fonction récursive est une fonction qui fait référence à elle-même. Dans R, une fonction récursive calculant le $n$ième terme de la suite u définie par $u_n = f(u_{n-1})$ peut être définie de la façon suivante.

```
un <- function(n=0, u0, func ){
    if (n==0)
      {
        return(u0)
      }
    else
      {
        return(un(n=n-1, u0=func(u0), func))
      }
}
```

Écrivez une fonction qui calcule le vecteur $\left(u_j^{(0)}, u_j^{(1)}, u_j^{(2)}, u_j^{(3)}\right)$ en fonction du vecteur $\left(u_{j-1}^{(0)}, u_{j-1}^{(1)}, u_{j-1}^{(2)}, u_{j-1}^{(3)}\right)$.

Écrivez une fonction récursive qui calcule les effectifs des différentes classes d'âge à l'année n en fonction des effectifs à l'année 0. Si on part de 10 écureuils de la classe d'âge 0, quels sont les effectifs attendus pour les quatre classes d'âges après 50 ans ?

Représentez graphiquement l'évolution des effectifs des différentes classes d'âges, ainsi que l'évolution de l'effectif total de la population d'écureuils.

Comment le taux d'accroissement de la population évolue-t-il ?

1.2 Matrice de Leslie

La matrice de Leslie correspondant a la forme suivante

$$\begin{pmatrix} 0 & f_{10} & f_{20} & f_{30} \\ p_{01} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{23} & 0 \end{pmatrix}$$

Le calcul matriciel sous R permet d'effectuer rapidement les calculs précédents. Notez que sous R, le produit de matrice est effectué par l'opérateur %*%

```
library(Biodem)
leslie1 <- matrix(data = c(0, 2, 3, 1, 0.8, 0, 0, 0, 0, 0.5, 0,
    0, 0, 0, 0.25, 0), nrow = 4, ncol = 4, byrow = TRUE)
u0 <- c(10, 0, 0, 0)
leslie1 %*% u0
     [,1]
[1,]    0
[2,]    8
[3,]    0
[4,]    0
leslie1 %*% leslie1 %*% u0
```

```
     [,1]
[1,]   16
[2,]    0
[3,]    4
[4,]    0
```

```
mtx.exp(leslie1, 50) %*% u0
```

```
            [,1]
[1,] 15692710941
[2,]  8080472025
[3,]  2600491894
[4,]   418450684
```

Le taux de croissance converge vers la première valeur propre réelle de la matrice de Leslie. La distribution stable par âge converge vers le vecteur propre normé associé à la première valeur propre de la matrice de Leslie.

```
eigen(leslie1)
```

```
$values
[1]  1.55364299+0.0000000i -0.72912204+0.3782495i -0.72912204-0.3782495i
[4] -0.09539891+0.0000000i
$vectors
              [,1]                   [,2]                   [,3]             [,4]
[1,] 0.87932237+0i  0.6547526+0.0000000i  0.6547526+0.0000000i -0.008092715+0i
[2,] 0.45277963+0i -0.5660595-0.2936569i -0.5660595+0.2936569i  0.067864207+0i
[3,] 0.14571547+0i  0.2235472+0.3173475i  0.2235472-0.3173475i -0.355686475+0i
[4,] 0.02344739+0i -0.0159171-0.1170689i -0.0159171+0.1170689i  0.932103046+0i
```

```
eigen(leslie1)$values[1]
```

```
[1] 1.553643+0i
```

```
dis <- eigen(leslie1)$vector[, 1]
dis/sum(dis)
```

```
[1] 0.58572101+0i 0.30159877+0i 0.09706180+0i 0.01561842+0i
```

```
mtx.exp(leslie1, 50) %*% u0/sum(mtx.exp(leslie1, 50) %*% u0)
```

```
           [,1]
[1,] 0.58572101
[2,] 0.30159877
[3,] 0.09706180
[4,] 0.01561842
```

2 Autres modèles matriciels de populations

2.1 Modèle à deux classes d'âges

Hirondelle rustique ou hirondelle de cheminée *Hirundo rustica*. Source : Wikipedia

Chez l'hirondelle de cheminée (*Hirundo rustica*), on peut schématiquement classer les individus féconds en deux classes :

- ⋆ les individus d'un an dont la fécondité moyenne est de 3 juvéniles par femelle ;
- ⋆ les individus de plus d'un an dont la fécondité moyenne est de 6 juvéniles par femelle.

20 % des juvéniles atteignent leur première année. La survie des oiseaux d'un an est de 0.49 et celle des oiseaux de plus d'un an de 0.66.

Si l'on recense cette population tous les ans à la période des naissances, on peut exprimer l'évolution de la population des hirondelles sexuellement matures d'une année sur l'autre avec les deux équations suivantes :

$$\left\{\begin{array}{rl} n_{1t+1} = & 0.2 \times (1.5 \times n_{1t} + 3 \times n_{2t}) \\ n_{2t+1} = & 0.49 \times n_{1t} + 0.66 \times n_{2t} \end{array}\right.$$

où l'on distingue deux sous-populations :

Le nombre d'individus âgés de 1 an à l'année t : n_{1t}

Le nombre d'individus âgés de 2 ans ou plus à l'année t : n_{2t}

Expliquer ces équations :

À l'année $t = 1$, on part d'une population formée de 2 couples d'oiseaux de 3 ans, 8 couples d'oiseaux de 2 ans et 1 couple de 1 an. Donner l'évolution des effectifs de cette population pendant les 15 premières années :

Tracez également le graphique représentant le taux de croissance de la population totale d'hirondelles au cours du temps.

Tracer le graphique représentant le nombre d'individus de la deuxième classe d'âge, en fonction du nombre d'individus de la première classe d'âge. Calculer avec R les rapports $(n_1 + n_2)_{t+1}/(n_1 + n_2)_t$ et n_{1t}/n_{2t}. Conclure sur le devenir de cette population.

Proposez un modèle matriciel pour cette population et vérifiez vos résultats à l'aide des valeurs propres et vecteurs propres de la matrice de transition.

2.2 Modèle avec deux catégories de cellules

On considère une population cellulaire dont on veut étudier la croissance. On distingue dans la population deux catégories de cellules :

- ⋆ des cellules jeunes et immatures, notées a, qui ne se divisent pas ;
- ⋆ des cellules matures, notées b, susceptibles de se diviser.

On fait de plus les hypothèses suivantes :

- ⋆ la reproduction a lieu à intervalles de temps discrets ;
- ⋆ les cellules b se divisent en un pas de temps en une cellule a et une cellule b : $b \to ab$;
- ⋆ d'un pas de temps à l'autre les cellules a deviennent matures : $a \to b$.

En partant d'une unique cellule a, construire le schéma de croissance sur 6 pas de temps :

$a \to \ldots$

On appelle $N_a(t)$ et $N_b(t)$ le nombre de cellules a et le nombre de cellules b au pas de temps t. Etablir la formule de récurrence qui décrit ce système :

$$\begin{cases} N_a(t+1) = & \dots \\ N_b(t+1) = & \dots \end{cases}$$

A $t = 1$, on part d'une cellule a unique. Calculer les 20 premières valeurs de N_a et N_b avec un programme R.

Montrer que le système a un taux de croissance constant et conclure.

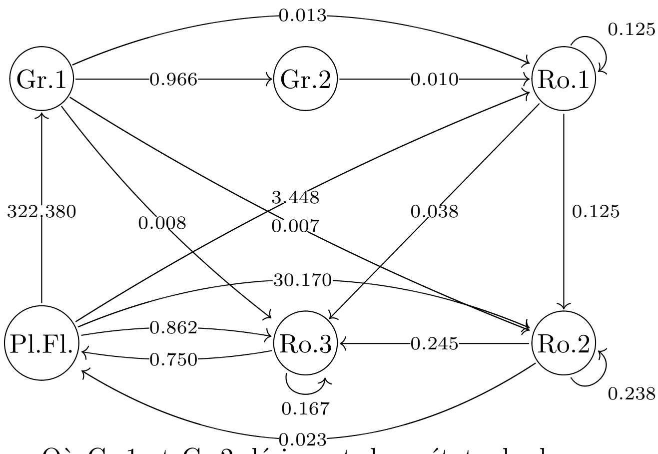
2.3 Dynamique des populations et cycle de vie d'une plante

La cardère des bois *Dipsacus sylvestris* est une plante au cycle de vie particulier : ses graines peuvent se développer ou rester en dormance une année. Durant ses premières années de vie, la plante développe une rosette de feuilles. On distingue des rosettes de trois tailles :

- ⋆ petites rosettes : moins de 2.5cm de diamètre.
- ⋆ rosettes moyennes : 2.5-19cm de diamètre.
- ⋆ grandes rosettes : 19cm de diamètre ou plus.

Lorsque la plante a accumulé suffisament de réserves, elle fleurit et produit des graines une seule fois (on parle de "semelparité"). Le cycle de vie de cette plante peut être schématisé par le diagramme suivant :

La cardère sauvage *Dipsacus fullonum*. Source : Wikipedia



Où Gr.1 et Gr.2 désignent deux états de dormance des graines, Ro.1-3 les trois tailles de rosettes, et Pl.Fl. désigne la plante fleurie.

Quels sont les nombres sur le schéma ci-dessus qui peuvent être interprétés comme des probabilités ?

Comment expliquez-vous les nombres figurant sur les flèches partant de la plante fleurie ?

Quelle-est la matrice de transition correspondant au modèle ci-dessus ?

Vers quelle structuration stable et quel taux d'acroissement la population va-t-elle évoluer ?