Fiche TD avec le logiciel R : bem8

Simulation de la dynamique d'une population - Modèles récurrents

Sandrine Charles, Sylvain Mousset, Nicolas Rochette

Le modèle logistique. La suite de Fibonacci. Un modèle avec deux classes d'âge. Un modèle avec deux populations en interaction.

Table des matières

1 Retour sur le modèle logistique

On rappelle la définition du modèle logistique discret :

$$N_{t+1} = N_t + rN_t\left(1 - \frac{N_t}{K}\right)$$

où r est le taux d'accroissement maximal de la population considérée et K une taille de population caractéristique.

Il permet de modéliser, en particulier, la croissance d'une population est souvent limitatée en ressources, pour laquelle la surpopulation conduit à une fécondité réduite des femelles ou à une mortalité accrue des stades juvéniles.

Selon la valeur taux d'accroissement r de l'espèce, le modèle prédit des régimes d'évolution de la taille de population très différents ; nous allons ici l'illustrer en simulant des populations avec différentes valeurs de r.

Exercice – En vous appuyant sur l'analyse qualitative du modèle (TP7), commentez très rapidement les régimes observés pour $r < 2$ et $r > 2$.

Exercice – Ré-implémentez la fonction `logistiqueD` permettant d'obtenir N_{t+1} à partir de N_t, si celle-ci n'est plus définie dans votre environnement (voir TP7).

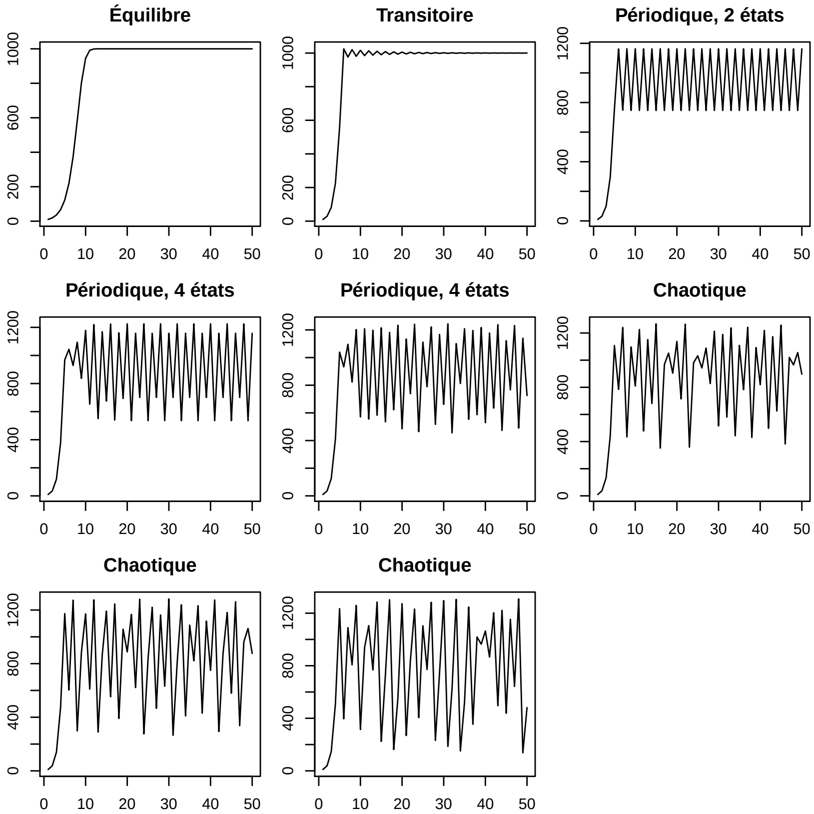
Exercice – Pour $r = 0.9$, $N_0 = 10$, $K = 1000$, calculez par récurence les tailles de populations aux temps 1 à 50 comme au TP7, puis représentez la taille de la population en fonction du temps – pour cela vous utiliserez l'option `type="l"` de la fonction `plot`.

Exercice – Inspirez-vous du code utilisé à la question précédente pour écrire une fonction traçant l'évolution de la taille de la population sur 50 pas de temps pour $N_0 = 10$, $K = 1000$ et un paramètre r à renseigner.

```
trace_evol <- function(r) {
  ...
  ...
  lines(...)
}
```

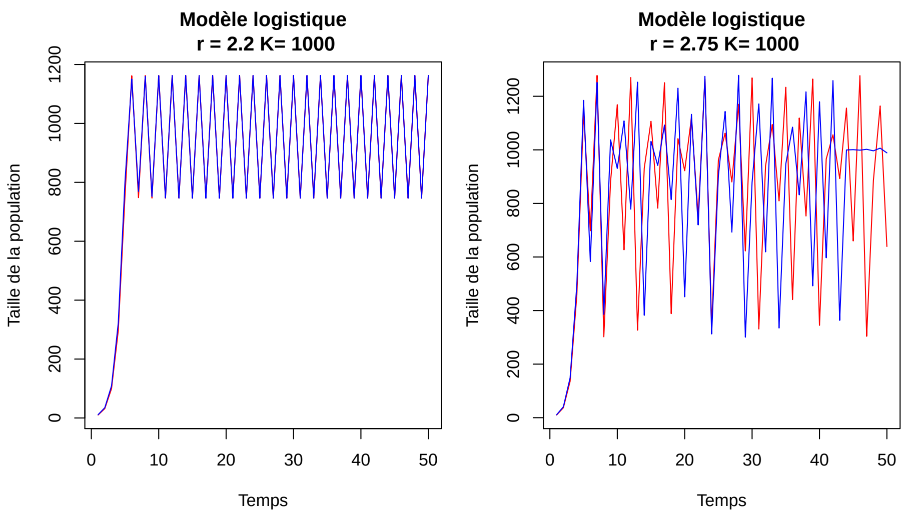
(*Remarque*– Afin de pouvoir modifier un 'long' code plus aisément, vous travaillerez dans le *bloc-notes Windows*. Vous pourrez alors copier/coller votre code dans R.)

Exercice – Tracez l'évolution de la taille de la population sur 50 pas de temps pour $r \in \{0.9, 1.9, 2.2, 2.5, 2.6, 2.7, 2.8, 2.9\}$. Vous devez obtenir quatre types de dynamiques différents :
- convergence vers un état d'équilibre
- convergence vers un état d'équilibre après un régime transitoire d'oscillations
- régime périodique (à deux ou plus états)
- régime chaotique



Exercice – Nous allons maintenant étudier l'influence du paramètre N_0 sur l'évolution du nombre d'individus : Pour $r \in \{2.2, 2.8\}$, $N_0 \in \{10, 11\}$, calculez l'évolution de la population sur 50 pas de temps (quatre populations).

Tracez sur un premier graphique l'évolution des populations pour $r = 2.2$, en rouge et en bleu. Sur un second graphique, faites de même pour les populations $r = 2.8$. Que constatez-vous ?



2 La suite de Fibonacci

Leonardo Pisano, mieux connu sous son surnom Fibonacci, est né en Italie vers 1170 mais fut élevé en Algérie. Il a contribué de manière importante aux progrès des mathématiques, en particulier en algèbre. Il est surtout célèbre pour la suite qui porte son nom, historiquement le premier exemple d'une suite récurrente. La suite a été présentée par Fibonnaci comme la solution d'un problème de lapins.

Supposons qu'en janvier, on ait un couple de lapins adultes –nous dirons un "couple adulte"– et que ce couple adulte engendre un couple de lapereaux chaque fin de mois. Ce couple est juvénile pendant un mois, puis à la fin du mois il devient adulte et commence à se reproduire. On a donc 2 couples en février, un d'adultes et un de lapereaux.

Exercice – Calculez le nombre de couples chaque mois jusqu'au mois de juin.
Mars :
Avril :
Mai :
Juin :

On définit N_t le nombre de couples au mois t. On a alors $N_1 = 1$, $N_2 = 2$, et pour $t \geq 3$ $N_t = N_{t-1} + N_{t-2}$. Autrement dit, (Nt) est une suite récurente où un terme est le résultat de la somme des deux précédents.

Exercice – Implémentez une fonction permettant de calculer le terme N_t de la suite de Fibonacci à partir des termes N_{t-1} et N_{t-2}.
Vérification :

```
fibonacci(Ntm1 = 2, Ntm2 = 1)
[1] 3
```

Exercice – Calculez par récurrence les 20 premiers termes de la suite de Fibonacci.

```
 [1]     1     2     3     5     8    13    21    34    55    89   144   233   377
[14]   610   987  1597  2584  4181  6765 10946
```

Exercice – Donnez le 20^{e}terme de la suite

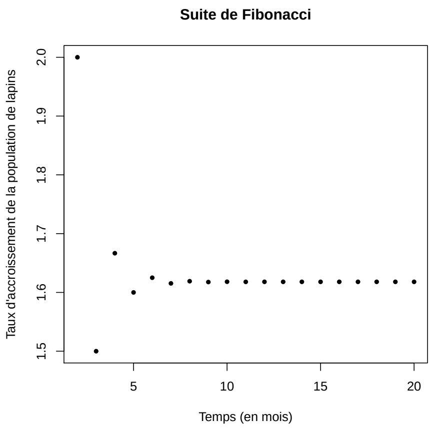
```
[1] 10946
```

Nous allons maintenant nous intéresser au taux d'accroissement de la population de lapins au mois t $(t \geq 2)$: $V_t = N_t/N_{t-1}$

Exercice – À partir du vecteur des 20 premières valeurs de la suite de fibonacci, calculez les 19 premières valeurs de V_t.

```
V
 [1] 2.000000 1.500000 1.666667 1.600000 1.625000 1.615385 1.619048 1.617647 1.618182
[10] 1.617978 1.618056 1.618026 1.618037 1.618033 1.618034 1.618034 1.618034 1.618034
[19] 1.618034
```

Exercice – Tracez le graphique du taux d'accroissement en fonction du mois.



Exercice – Au bout de 20 mois, la population de lapins vous paraît-elle avoir atteint son "rythme de croisière" ?

Exercice – Montrez que $V_t = 1 + 1/V_{t-1}$.

Exercice – Montrez que la suite des taux d'accroissement admet $(1+\sqrt{5})/2$ (le nombre d'or) comme unique point d'équilibre, et que celui-ci est stable.

3 Modèle avec deux classes d'âge

Chez l'hirondelle de cheminée (*Hirundo rustica*), on peut schématiquement classer les individus féconds en deux classes :
- les individus jeunes, d'un an, dont la fécondité moyenne est de 4 oisillons par femelle,
- les individus mûrs, de plus d'un an, dont la fécondité moyenne est de 6.6 oisillons par femelle.

De plus, 20 % des juvéniles atteignent survivent à leur première année, alors que la survie des oiseaux jeunes est de 50% et celle des oiseaux mûrs de 70%.

Cette population est recensée tous les ans à la période des amours en faisant la distinction entre les individus jeunes (J_t) et mûrs (M_t). Sachant qu'il y a 50% de femelles dans les deux classes d'âge, l'évolution de la population des hirondelles d'une année sur l'autre s'exprime par les équations suivantes :

$$\begin{cases} J_{t+1} = & 0.2 \times (2 \times J_t + 3.3 \times A_t) \\ M_{t+1} = & 0.5 \times M_t + 0.7 \times M_t \end{cases}$$

Exercice – Comprenez et expliquez ces équations

Exercice – Implémentez une fonction qui renvoie les deux valeurs J_{t+1} et M_{t+1} à partir de J_t et M_t.

Indications – Une fonction ne retourne jamais qu'un seul objet, et vous êtes donc face à un problème car il vous faut retourner J_{t+1} et M_{t+1}. Une solution consiste à réunir les deux valeurs dans une liste, comme ci-dessous :

```
hirondelles <- function(Jt, Mt){
  ...
  tp1 <- list(J=Jtp1, M=Mtp1)
  return(tp1)
}
```

Exercice – À l'année 1, on part d'une population formée de 4 oiseaux de 3 ans, 16 oiseaux de 2 ans et 2 oiseaux de 1 an. Calculez par récurrence les effectifs de cette population pour les 20 premières années.

Indications – On s'inspirera de la méthode utilisée précédemment, mais en maintenant cette fois deux vecteurs `J` et `M`.

```
J
 [1]   2.00000  14.00000  15.50000  17.75000  20.30000  23.21750  26.55425  30.37055
 [9]  34.73532  39.72738  45.43688  51.96694  59.43547  67.97737  77.74688  88.92044
[17] 101.69982 116.31583 133.03240 152.15143
M
 [1]  20.00000  15.00000  17.50000  20.00000  22.87500  26.16250  29.92250  34.22288
 [9]  39.14129  44.76656  51.20028  58.55864  66.97451  76.59990  87.60861 100.19947
[17] 114.59985 131.06980 149.90678 171.45095
```

Exercice – Calculez les taux d'accroissement pour les 20 premiers pas de temps. Que constatez-vous ?

Exercice – Calculez les proportions d'hirondelles jeunes et mûres pour les 20 premières années ; concluez sur le devenir de cette population.

4 Modèle avec deux populations en interaction

On étudie l'interaction entre un parasitoide et son hôte et les conditions dans lesquelles ces deux populations coexistent. Le parasitoide est une guêpe (*Venturia canescens*) qui pond ses oeufs dans les larves de papillons, l'hôte.

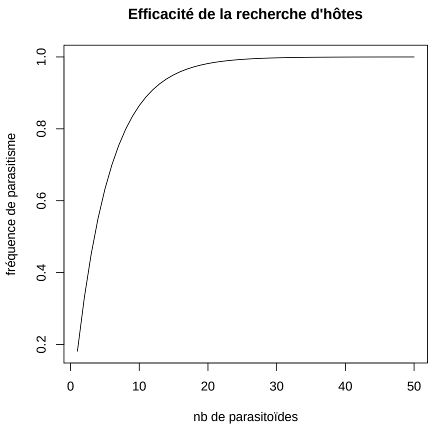
A la génération t, le nombre d'individus de la population d'hôtes est n_t et le nombre d'individus de la population de parasitoides est p_t. On suppose que l'évolution couplée de ces deux populations est décrite par ces équations :

$$\begin{cases} n_{t+1} = & (1+r) \times n_t \times (1 - f(p_t)) \\ p_{t+1} = & n_t \times f(p_t) \end{cases}$$

où la fréquence de parasitisme est donnée par : $f(p_t) = 1 - e^{-ap_t}$

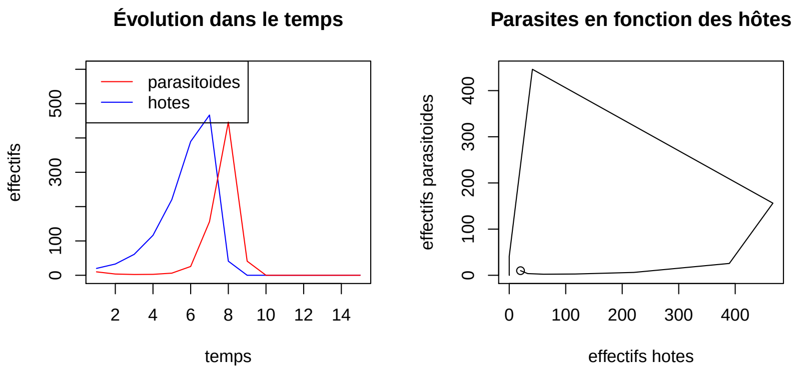
Exercice – Tracez le graphique de f en fonction de p, en donnant plusieurs valeurs numériques au paramètre a. Quelle est la signification de ce paramètre ?

```
p<-1:50
a<-0.2
fp<-1-exp(-a*p)
plot(p,fp,type="l",
  xlab="nb de parasitoïdes",
  ylab="fréquence de parasitisme",
  main="Efficacité de la recherche d'hôtes",
  )
```



Exercice – Tracez, sur un même graphique, l'évolution de n et de p sur 15 générations lorsque $r = 1.0$ et $a = 0.02$, avec une population initiale d'hôtes de 20 individus et une population initiale de parasitoides deux fois moins importante. Tracez aussi un graphique de ces résultats dans le plan (n, p). Interprétez.

```
calcule.par<-function(ninit=20,pinit=10,nmax=15,r=1.0,a=0.02){
  n=numeric(nmax)
  p=numeric(nmax)
  n[1]=ninit
  p[1]=pinit
  for(i in 2:nmax){
    n[i]<- (1+r) * n[i-1] * (1-1+exp(-a*p[i-1]))
    p[i]<-n[i-1] * (1-exp(-a*p[i-1]))
  }
  return(list(n=n,p=p))
}
parasitoides = calcule.par()
par(mfrow=c(1,2))
plot(parasitoides$n, col="blue", type="l",
  ylim=c(0,600),
  xlab="temps", ylab="effectifs",
  main="Évolution dans le temps"
  )
lines(parasitoides$p, col="red")
legend("topleft", legend=c("parasitoides","hotes"), col=c("red","blue"), lty=1)
plot(parasitoides$n, parasitoides$p, type="l",
  xlab="effectifs hotes", ylab="effectifs parasitoides",
  main="Parasites en fonction des hôtes"
  )
points(x=parasitoides$n[1], y=parasitoides$p[1])
```



On propose un autre modèle, avec cette fois une croissance logistique des hôtes :

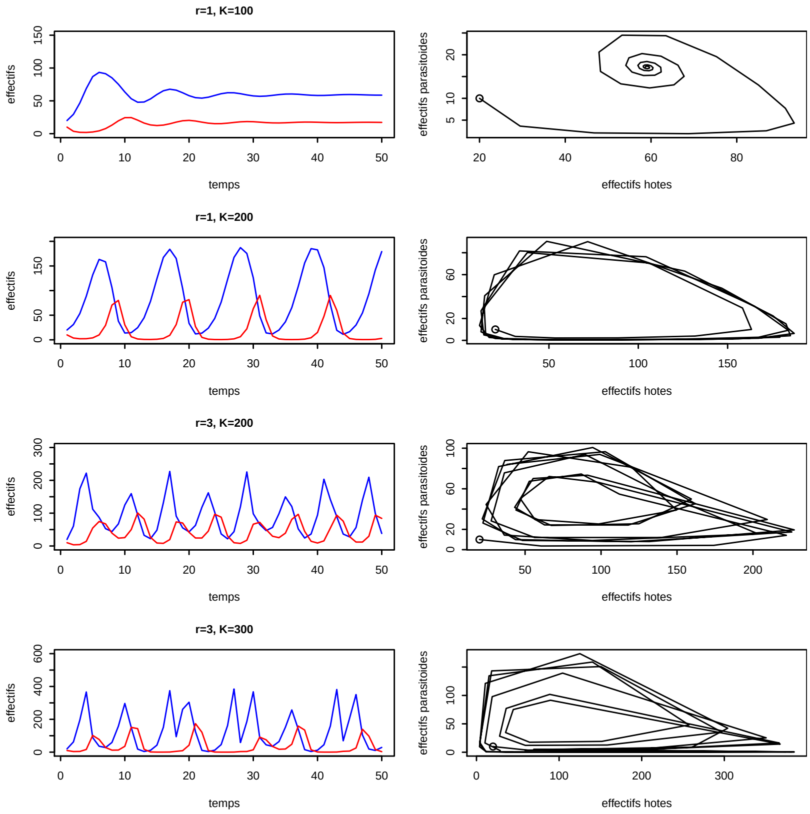
$$\begin{cases} n_{t+1} = & n_t \times \left(1 + r\left(1 - \frac{n_t}{K}\right)\right) \times (1 - f(p_t)) \\ p_{t+1} = & n_t \times f(n_t, p_t) \end{cases}$$

```
calcule.parlog<-function(ninit=1,pinit=0,nmax=20,r=0.2,a=0.2,K=100){
  n=numeric(nmax)
  p=numeric(nmax)
  n[1]=ninit
  p[1]=pinit
  for(i in 2:nmax){
    n[i]<- n[i-1] * (1+r*(1-n[i-1]/K)) * (1-1+exp(-a*p[i-1]))
    p[i]<- n[i-1] * (1-exp(-a*p[i-1]))
  }
  return(list(n=n,p=p))
}
```

Exercice – Tracez l'évolution de n et de p sur 50 générations, et dans le plan $(n,\, p)$ pour :

- $r = 1$ et $K = 100$
- $r = 1$ et $K = 200$
- $r = 3$ et $K = 200$
- $r = 3$ et $K = 300$

```
pop1 = calcule.parlog(20, 10, nmax = 50, 1, 0.02, 100)
pop2 = calcule.parlog(20, 10, nmax = 50, 1, 0.02, 200)
pop3 = calcule.parlog(20, 10, nmax = 50, 3, 0.02, 200)
pop4 = calcule.parlog(20, 10, nmax = 50, 3, 0.02, 300)
par(mfrow = c(4, 2), cex.axis = 0.7, cex.lab = 0.7, cex.main = 0.8,
    mar = c(4, 4, 1.5, 0), tcl = -0.25, mgp = c(2, 0.5, 0))
plot(pop1$n, col = "blue", type = "l", xlab = "temps", ylab = "effectifs",
    main = "r=1, K=100\n", ylim = c(0, 150))
lines(pop1$p, col = "red")
plot(pop1$n, pop1$p, type = "l", xlab = "effectifs hotes", ylab = "effectifs parasitoides",
    main = "")
points(x = pop1$n[1], y = pop1$p[1])
plot(pop2$n, col = "blue", type = "l", xlab = "temps", ylab = "effectifs",
    main = "r=1, K=200\n", ylim = c(0, 200))
lines(pop2$p, col = "red")
plot(pop2$n, pop2$p, type = "l", xlab = "effectifs hotes", ylab = "effectifs parasitoides",
    main = "")
points(x = pop2$n[1], y = pop2$p[1])
plot(pop3$n, col = "blue", type = "l", xlab = "temps", ylab = "effectifs",
    main = "r=3, K=200\n", ylim = c(0, 300))
lines(pop3$p, col = "red")
plot(pop3$n, pop3$p, type = "l", xlab = "effectifs hotes", ylab = "effectifs parasitoides",
    main = "")
points(x = pop3$n[1], y = pop3$p[1])
plot(pop4$n, col = "blue", type = "l", xlab = "temps", ylab = "effectifs",
    main = "r=3, K=300\n", ylim = c(0, 600))
lines(pop4$p, col = "red")
plot(pop4$n, pop4$p, type = "l", xlab = "effectifs hotes", ylab = "effectifs parasitoides",
    main = "")
points(x = pop4$n[1], y = pop4$p[1])
```


r=1, K=100
effectifs
temps
effectifs parasitoides
effectifs hotes
r=1, K=200
effectifs
temps
effectifs parasitoides
effectifs hotes
r=3, K=200
effectifs
temps
effectifs parasitoides
effectifs hotes
r=3, K=300
effectifs
temps
effectifs parasitoides
effectifs hotes