Fiche TD avec le logiciel : bem7

Analyse des systèmes dynamiques : modèles discrets

S. Mousset

Systèmes dynamiques discrets dans $\mathbb{R}$, utilisation de et de maple.

Table des matières

1 Définition des modèles

Les modèles discrets de dynamique des populations sont définis par leur fonction de récursion :

$$N_{t+1} = f(N_t)$$

Au cours de ce TD nous étudierons les suivants :

Le modèle logistique discret

$$N_{t+1} = N_t + rN_t \left(1 - \frac{N_t}{K}\right)$$

où r et K sont des paramètres positifs.

Le modèle logistique généralisé discret

$$N_{t+1} = N_t + rN_t \left(1 - \left(\frac{N_t}{K}\right)^{\theta}\right)$$

où r et K sont des paramètres positifs.

Le modèle de Gompertz discret

$$N_{t+1} = N_t - rN_t \ln \frac{N_t}{K}$$

où r et K sont des paramètres positifs. Notez le signe **moins** !

2 Analyse qualitative des systèmes discrets

2.1 Points d'équilibre

Question. Comment obtient-on les points d'équilibre d'un modèle discret de dynamique des populations ?

Exercice. Retrouvez les points d'équilibre du *modèle logistique discret*.
Exercice. Quels sont les points d'équilibre du *modèle de Gompertz discret* ?
Exercice. Même question pour ceux du *modèle logistique généralisé discret*.

2.2 Stabilités des points d'équilibre

Question. Comment connait-on les stabilités des points d'équilibre d'un modèle discret ?

Exercice. Donnez les stabilités des points d'équilibre du *modèle logistique discret*.
Exercice. Faites de même pour le *modèle de Gompertz discret*...
Optionnel. (... et pour le *modèle logistique généralisé discret*. On rappelle que la dérivée de x^θ pour $\theta \neq 0$ est $\theta x^{\theta-1}$)

3 Représentation en toile d'araignée (cobweb)

3.1 Implémentation des modèles

Exercice. Implémentez les fonctions de récursion du *modèle logistique simple* et du *modèle de Gompertz*.

Vérification :

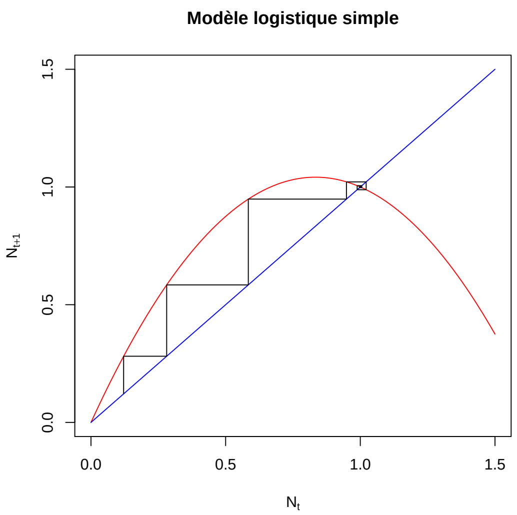
```
logistiqueD(Nt = 84, r = 0.5, K = 100)
[1] 90.72
```

```
gompertzD(Nt = 84, r = 0.5, K = 100)
[1] 91.32284
```

3.2 Tracé

Pour la suite du TD, nous choisirons $K = 1$. Ce cas peut être considéré comme un changement d'échelle où la taille de population est comptée en pourcentage de la taille d'équilibre.

La représentation en toile d'araignée consiste à représenter la suite $N_{t+1} = f(N_t)$ en utilisant les courbes d'équations $y = f(x)$ et $y = x$. Un exemple est donné ci-dessous.



La procédure à suivre pour la tracer est la suivante :

1. Choisissez un N_0 et un r.
2. Calculez une vingtaine de valeurs successives de N_t
3. Initialisez une fenêtre graphique (`plot(NULL, ...)`).
4. Ajoutez la droite d'équation $y = x$ (`abline(0,1)`) et la courbe du modèle (avec `curve(...)`).

5. Pour chaque couple (N_t, N_{t+1}), tracez la ligne brisée les reliant. Pour tracer un segment entre deux points (x_1, y_1) et (x_2, y_2), vous pouvez utiliser la fonction lines :
   `lines(x=c(x1,x2), y=c(y1,y2))`

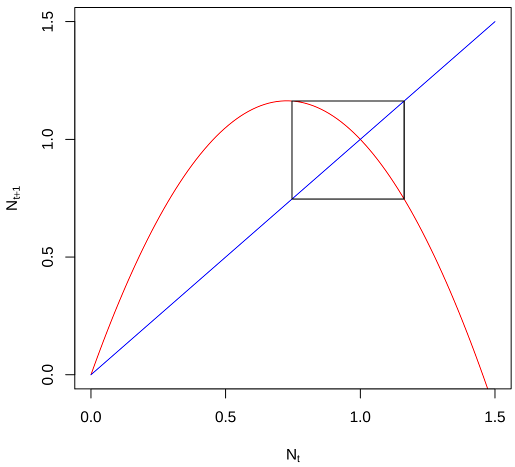
Exercice. Tracez quelques diagrammes en toile d'araignées pour les modèles implémentés plus haut.

Pour le modèle logistique simple, quelle différence observez-vous entre les cas où $N = K$ est stable avec $r < 1$ et $r > 1$? Quel est le lien avec $\left.\frac{df}{dN}\right|_{N=N^\star}$?

4 Cycles limite

Lorsque le point $N = K$ est instable, mais que la population se maintient (par exemple lorsque $2 < r < 3$ dans le modèle logistique), l'effectif de la population devient cyclique. Le cycle comprend alors un nombre d'état qui est une puissance de 2. Pour des valeurs trop élevées de r, le modèle devient chaotique.

Donnez la représentation en toile d'araignée pour le cas d'un cycle à deux états dans le modèle logistique. Pour cela faites évoluer votre population durant un grand nombre de générations puis représentez seulement les trois derniers états.



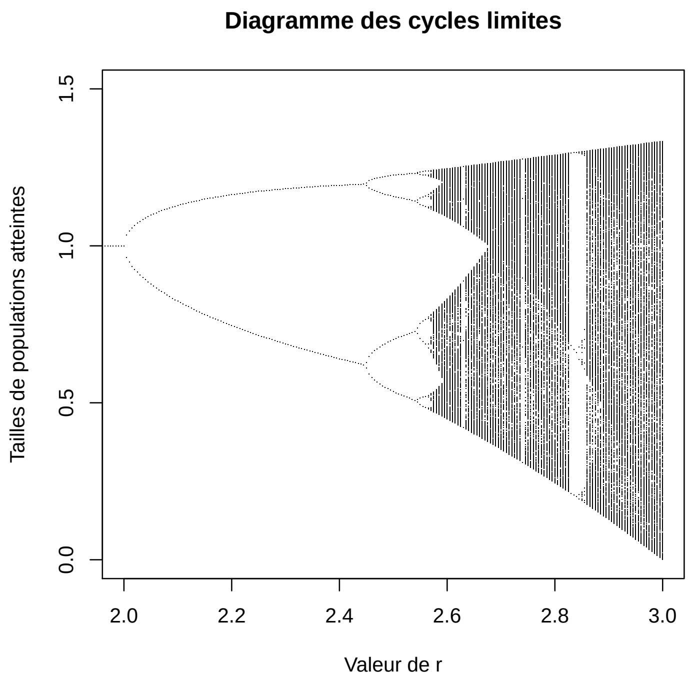
Représentation des états pris dans le cycle limite

On cherche à présent à visualiser les valeurs des états des cycles limites lorsque r évolue, en particulier l'augmentation du nombre d'états du cycle et le passage à un régime chaotique. Pour cela on utilise l'algorithme suivant :

1. On pose $K = 1$, $r = r_{init}$
2. Choisissez un point de départ $M = K + \delta N$, par exemple `M = K + rnorm(n=1, mean=0, sd=1e-3)`

3. Laissez la suite converger vers le cycle limite (si elle converge) : faites 10000 itérations avant de fixer N0
4. Calculez les valeurs de N_t sur 1000 générations
5. Placer sur le graphique les points correspondant aux états atteints pour cette valeur de r
6. Incrémenter r d'un petit intervalle (par exemple 0.01) et revenir l'étape 2, jusqu'à ce que $r >= r_{max}$ (remarque : "*jusqu'à ce que*" nous indique que l'on utilisera une boucle *while*).

Avec le modèle logistique, vous devez obtenir une représentation semblable à celle-ci.



Exercice. Reproduisez le diagramme.

(*Remarque*– Afin de pouvoir modifier un 'long' code plus aisément, vous travaillerez dans le *bloc-notes Windows*. Vous pourrez alors puis soit copier/coller votre code dans R soit executer le contenu du fichier texte ainsi créé en tapant `source("chemin du fichier")` dans R.)