Cours de DEUG
Méthodes mathématiques pour les sciences de la vie I

Avner Bar-Hen

Université Aix-Marseille III
2002–2003

Table des matières

Table des matières i

1 Fonctions, limites, continuité 1
1 Fonction, représentation graphique . . . 1
1.1 Composition, fonction réciproque . . . 1
1.2 Graphe, courbe représentative . . . 2
2 Définition de la notion de limite . . . 3
2.1 Limite infinie en a . . . 5
2.2 Limite à l'infini . . . 5
3 Continuité . . . 6
3.1 Application à la définition de x^{α} . . . 7
4 Opérations sur les limites . . . 8
5 Exercices . . . 10

2 Dérivées des fonctions d'une variable 13
1 Définition . . . 13
2 Opérations sur les dérivées . . . 14
3 Théorème des accroissements finis . . . 15
3.1 Convexité, concavité . . . 17
4 Dérivées des fonctions réciproques . . . 19
5 Fonctions trigonométriques inverses . . . 19
5.1 $f(x) = \arcsin(x)$ . . . 19
5.2 $f(x) = \arccos(x)$ . . . 20
5.3 $f(x) = \arctan(x)$ . . . 21
6 Exercices . . . 22

3 Polynômes 25
1 Définition . . . 25
2 Opérations sur les polynômes . . . 25
2.1 Somme . . . 25
2.2 Produit . . . 26
2.3 Premières propriétés . . . 26
3 Division Euclidienne . . . 27
3.1 Cas particulier : division d'un polynôme $P(x)$ par $x - a$ . . . 28
4 Racine(s) d'un polynôme . . . 28

5 Fractions rationnelles 29
6 Exercices 34

4 Formule de Taylor-Développements limités **37**
1 La formule de Taylor 37
1.1 Cas $m = 0$ 37
1.2 Cas $m = 1$ 37
2 Cas général 39
3 Développements limités : définition, premières propriétés 40
3.1 Unicité du développement limité 41
3.2 Troncature d'un développement limité 41
4 Opérations sur les développements limités 42
4.1 Somme 42
4.2 Produit 43
4.3 Composition 44
4.4 Primitive d'un développement limité 46
5 Exemples d'utilisation des développements limités 46
5.1 Formes indéterminées $\frac{0}{0}$ 46
5.2 Étude d'une forme indéterminée 1^∞ 48
6 Étude d'une branche infinie (recherche d'asymptote) 48
7 Exercices 50

5 L'intégrale **53**
1 Définition de $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 53
2 Premières propriétés 54
2.1 Linéarité de l'intégrale 54
2.2 Relation de Chasles 54
2.3 Inégalités : 54
3 Primitives et intégrales 55
3.1 Intégrales indéfinies 56
4 La formule d'intégration par parties 57
5 La formule du changement de variable 58
6 Quelques applications de l'intégrale 61
6.1 Calcul d'aires 61
6.2 Longueur d'un arc de courbe 61
6.3 Centre de gravité d'une tige rectiligne 62
7 Extension de la notion d'intégrale définie 62
8 Exercices 66

6 Fonction de plusieurs variables **69**
1 Introduction 69
1.1 Représentation graphique 69
1.2 Limite 70
1.3 Continuité 71
2 Fonctions composées 71

2.1 Fonction de fonction . . . 71
2.2 Fonction composée . . . 72
2.3 Autre cas . . . 73
3 Dérivées partielles . . . 73
3.1 Dérivées partielles secondes . . . 74
4 Exercices . . . 78

A Intégrales multiples **81**
1 Intégrale double . . . 81
1.1 Notion d'intégrale double . . . 81
1.2 Calcul d'une intégrale double . . . 81
1.3 Propriétés . . . 83
1.4 Cas particuliers . . . 83
1.5 Calcul de volumes et de surfaces . . . 84
1.6 Changement de variables . . . 85
2 Intégrale triple . . . 87
2.1 Notion d'intégrale triple . . . 87
2.2 Calcul d'une intégrale triple . . . 87
2.3 Changement de variables . . . 89
2.4 Généralisation . . . 89
3 Rappels de mécanique . . . 89
4 Exercices . . . 91
5 Solutions . . . 93

B Formulaire **99**
1 Trigonométrie . . . 99
2 Fonctions élémentaires . . . 100
2.1 Fonctions trigonométriques . . . 100
2.2 Logarithme népérien . . . 100
2.3 Exponentielle . . . 101
2.4 Puissance . . . 101
3 Fonctions . . . 101
3.1 Dérivées . . . 101
3.2 Formule de Taylor . . . 102
3.3 Développements usuels au voisinage de 0 . . . 102
4 Primitives et Intégrales . . . 103
4.1 Règles de calcul . . . 103
4.2 Primitives élémentaires . . . 103
4.3 Procédés d'intégration . . . 103
4.4 Intégrales définies généralisée . . . 103
5 Fonctions de plusieurs variables . . . 104
5.1 Dérivées partielles . . . 104
6 L'alphabet grec . . . 105

Chapitre 1

Fonctions, limites, continuité

1 Fonction, représentation graphique

On considère des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$, et définies sur une partie de $\mathbb{R}$. Se donner une telle fonction f, c'est se donner une partie E de $\mathbb{R}$ et un procédé associant à chaque $x \in E$ un réel y (noté $f(x)$) bien déterminé. E est l'ensemble de définition de f. Dans tous les cas utiles, E est un intervalle, ou une réunion d'intervalles.

Exemples :
- $E = [a, b]$ ($a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$)
- $E =]a, b]$
- $E = [0, +\infty[$
- $E = [a, c[\cup]c, b]$ avec $a < c < b$

Notation :

$$f : E \to \mathbb{R}$$

Très souvent, la fonction est définie par une formule donnant $f(x)$, et le domaine de définition est implicite : c'est l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ pour lesquels la formule a un sens et fournit un réel $f(x)$.

Exemple : $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, le domaine de définition est $E = [-1, +1]$

1.1 *Composition, fonction réciproque*

Soient $f : E \to \mathbb{R}$, et $g : F \to \mathbb{R}$ deux fonctions ; la composée $g \circ f$ est définie par la formule $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. Son domaine de définition est l'ensemble $H = \{x \in \mathbb{R}; x \in E \text{ et } f(x) \in F\}$. On a toujours $H \subset E$ mais il peut arriver que H soit distinct de E.
On dit que g est une fonction réciproque de f si on a

1. $F = \{f(x); x \in E\}$ c'est-à-dire que le domaine de définition de g est l'image de E par f ;
2. $g(f(x)) = x$ pour tout $x \in E$

Ces deux conditions montrent que g est déterminée par f : il y a donc au plus une fonction réciproque d'une fonction f donnée.
Pour que la fonction $f : E \to \mathbb{R}$ admette une fonction réciproque, il faut et il suffit que la condition suivante soit vérifiée : si x_1, x_2 sont deux points distincts de E, alors $f(x_1) \neq f(x_2)$. (On dit que f est injective).
Si g est la fonction réciproque de f, on a, pour x, y réels, l'équivalence logique :

$$\left\{ \begin{array}{l} x \in E \\ \text{et } y = f(x) \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} y \in F \\ \text{et } x = g(y) \end{array} \right.$$

(E, F domaines de définition de f, g respectivement).
On voit d'ailleurs ainsi que f est alors la réciproque de g. On dit souvent *fonction inverse* de f au lieu de *fonction réciproque* de f et on note $g = f^{-1}$.

Attention : il faut bien distinguer f^{-1} de la fonction $x \mapsto \frac{1}{f(x)}$, notée $\frac{1}{f}$.

Exemple : $f(x) = x^2$ avec $E = [0, +\infty[$. f admet pour fonction réciproque la fonction $g(x) = \sqrt{x}$, définie sur $[0, +\infty[$. (en admettant que tout réel positif possède une racine carrée positive).

1.2 *Graphe, courbe représentative*

Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction, ($E \subset \mathbb{R}$) ; le graphe de f est la partie G de $\mathbb{R}^2$ définie par $G = \{(x, f(x)); x \in E\}$. On confond en général G avec la courbe représentative T_f de f dans le plan (P) rapporté à un repère orthonormé $(o, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$; T_f est définie par la relation :

$$T_f = \{M; \exists x \in E, \overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{e_1} + f(x)\overrightarrow{e_2}\}$$

On dit aussi que T_f est la courbe d'équation $y = f(x)$ dans le repère Oxy.
L'intérêt de T_f est que son tracé permet de visualiser, et donc de rendre intuitives de nombreuses propriétés de f.

Exemple 1 : $f(x) = ax + b$, où a, b sont deux réels donnés ; (on dit que f est affine). Le graphe T_f de f est une droite D : si on appelle $\overrightarrow{u}$ le vecteur $(1, a)$ et M_o le point de coordonnées de (O, b), on a :

$$\overrightarrow{M_oM_x} = x\overrightarrow{u}$$

(où $M_x = (x, f(x))$). Ce qui signifie que T_f est la droite passant par M_o et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$.

Remarque : si (x_1, y_1) et (x_2, y_2) sont deux points distincts de D, on vérifie facilement que le rapport $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ est égal à a, et qu'il est donc indépendant du choix des deux points sur D. On dit que a est la pente de D. La pente de D vaut aussi $\tan(\theta)$, où θ est une mesure de l'angle que D fait avec l'axe Ox.

Exemple 2 : Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction admettant pour réciproque, $g : F \to \mathbb{R}$. On passe du graphe T_f à celui T_g de g, par la transformation : $(x, y) \mapsto (y, x)$ du plan : cette transformation est la symétrie autour de la droite $y = x$

Exercices :

1. Soit $G \subset \mathbb{R}^2$: quelle condition doit être vérifiée par G pour que G soit le graphe d'une fonction f ? la fonction f est elle alors unique ?
2. Donner un tracé du graphe des fonction $y = x + 1$, $y = |x + 1|$, $y = \sin(x)$, $y = |\sin(x)|$
3. Tracer des courbes d'équations $y = x^2$, $y = 1 + x + x^2$

2 Définition de la notion de limite

Considérons une fonction $f : X \to \mathbb{R}$, ($X \subset \mathbb{R}$) et soit $a \in \mathbb{R}$.
Pour pouvoir parler de la limite de $f(x)$, lorsque x tend vers a, il faut supposer que tout intervalle ouvert de centre a rencontre X ; autrement dit :

$$\forall \eta > 0, \exists x \in X \text{ tel que } |x - a| < \eta$$

Cette condition est toujours satisfaite si $a \in X$, mais il peut aussi arriver que $a \notin X$.

Exemples :
- $X =]\alpha, \beta]$, $(\alpha < a < \beta)$
- $X =]\alpha, a[\cup]a, \beta]$, $(\alpha < a < \beta)$
- $X = [a, \beta]$, $(a < \beta)$
- $X =]a, \beta]$, $(a < \beta)$

Définition 1.1 *Soit $l \in \mathbb{R}$; on dit que $f(x)$ tend vers l quand x tend vers a, si :*

Pour tout $\epsilon > 0$, il existe un nombre $\eta > 0$ tel que $\left\{ \begin{array}{l} x \in X \\ \textit{et } |x - a| < \eta \end{array} \right. \Longrightarrow |f(x) - l| < \epsilon$

En d'autres termes, pour tout intervalle ouvert de centre l donné, $f(x)$ "tombe" dans cet intervalle dès que $|x - a|$ est assez petit, ($x \in X$). On notera :

$$l = \lim_{x \to a} f(x)$$

Remarques :

1. $f(x)$ admet au plus une limite, quand x tend vers a : si on pouvait trouver deux limites distinctes l_1 et l_2, on pourrait trouver deux intervalles ouverts disjoints I_1 et I_2 de centres l_1 et l_2 respectivement ; comme $l_1 = \lim_{x\to a} f(x)$, $f(x)$ appartient à I_1 pour $|x-a|$ assez petit. De même, $f(x) \in I_2$, dès que $|x-a|$ est assez petit. Comme $f(x)$ ne peut appartenir à la fois à I_1 et I_2, on aboutit à une contradiction.
2. Si $a \in X$, et si la limite de $f(x)$ pour $x \to a$ existe, alors $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. En effet, d'après la définition $f(a)$ doit appartenir à tout intervalle ouvert de centre $l = \lim_{x\to a} f(x)$: ce qui entraîne $l = f(a)$

Ainsi, lorsque $a \in X$, il peut être naturel de considérer la limite en a de la *restriction* de f à $X \setminus \{a\}$ (X privé du point a) ; on la note $l = \lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} f(x)$ (si elle existe).
Plus généralement, si B est une partie de X, on définit la limite $\lim_{\substack{x\to a\\ x\in B}} f(x)$ comme étant la limite $\lim_{x\to a} g(x)$, où g est la fonction de domaine de définition B, et qui est égale à f sur B. En termes plus directs : $l = \lim_{\substack{x\to a\\ x\in B}} f(x)$ si et seulement si :

pour tout $\epsilon > 0$, il existe au moins un $\eta > 0$, tel que $\left\{ \begin{array}{c} |x-a| < \eta \\ x \in B \end{array} \right. \Longrightarrow |f(x) - l| < \epsilon$

Cas particuliers :

- $B = X \setminus \{a\}$, on obtient la définition de $l = \lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} f(x)$;
- $B = X \cap]a, +\infty[$, on obtient la notion de limite à droite en a : $\lim_{\substack{x\to a\\ x> a}} f(x)$; elle est notée $f(a^+)$ (lorsqu'elle existe) ;
- $B = X \cap]-\infty, a[$, on obtient la limite à gauche : $\lim_{\substack{x\to a\\ x< a}} f(x) = f(a^-)$.

Exemples :

1. $f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } x < 1 \\ 2 & \text{si } x = 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{array} \right.$

   en $a = 1$, $f(a^+)$, $f(a)$ et $f(a^-)$ existent et sont deux à deux distincts.
2. $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{x}\right)$; $|f(x)| \leq 1$ mais f n'admet pas de limite à droite en $a = 0$:

   $$f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \text{ , } f\left(\frac{1}{4}\right) = 1, \ldots$$

   en général $f\left(\frac{1}{2k}\right) = 1$, pour k entier positif, et

   $$f\left(1\right) = -1 \text{ , } f\left(\frac{1}{3}\right) = -1, \ldots$$

   en général $f\left(\frac{1}{2k+1}\right) = -1$, $k \in \mathbb{N}$.
   Ainsi le point $M_x = (x, f(x))$ oscille indéfiniment entre les droites horizontales $y = -1$ et $y = +1$ lorsque x tend vers zéro, $x > 0$; ce point n'admet pas de position limite lorsque x tend vers 0, $x > 0$.

3. Supposons : $X =]\alpha, \beta[$, $\alpha < a < \beta$. Alors $l = \lim_{x \to a} f(x)$ si et seulement si $f(a^+)$ et $f(a^-)$ existent et valent $f(a)$; l vaut nécessairement $f(a)$.
   De même $l = \lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f(x)$ si et seulement si $f(a^+)$ et $f(a^-)$ existent et sont égaux ; on a de plus $l = f(a^+) = f(a^-)$

2.1 Limite infinie en a

Définition 1.2 *Soient $f : X \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$; on suppose que pour tout $\epsilon > 0$, $X \cap]a - \epsilon, a + \epsilon[\neq \emptyset$. On dit que la $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ si pour tout $A \in \mathbb{R}$, il existe un $\eta > 0$ (dépendant de A) tel que :*

$$|x - a| < \eta \textit{ et } x \in X \Longrightarrow f(x) \geq A$$

Autrement dit, $f(x)$ dépasse toute valeur donnée dès que $|x - a|$ est assez petit. On définit de même la notion de limite $-\infty$ en a et l'on note : $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$

Exemples :

1. $f(x) = \frac{1}{|x-a|}$, $X =] - \infty, a[\cap]a, +\infty[$, on a :

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

2. $f(x) = \ln(x)$ (logarithme népérien de x), $X =]0, +\infty[$:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = -\infty$$

   On sait que f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ et que $f(xy) = f(x) + f(y)$ pour $x, y \in]0, +\infty[$. En particulier $\ln(1) = 2\ln(1)$ et donc $\ln(1) = 0$.
   Fixons $A \in \mathbb{R}$ et cherchons $n \geq 1$ tel que $\ln\left(\frac{1}{2^n}\right) < A$; comme $\ln\left(\frac{1}{2^n}\right) = n \ln\left(\frac{1}{2}\right)$ et comme $\ln\left(\frac{1}{2}\right) < \ln(1) = 0$, il suffit de prendre $n > \frac{|A|}{|\ln\left(\frac{1}{2}\right)|}$; fixant un tel entier n, on a alors :

$$0 < x < \frac{1}{2^n} \Longrightarrow \ln(x) < A$$

   On a ainsi vérifié que $\lim_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$

2.2 Limite à l'infini

Soit $f : X \to \mathbb{R}$; on suppose que X contient des réels arbitrairement grands (quel que soit $a \in \mathbb{R}$, il existe $x \in X$, ave $x \geq a$) ; si $l \in \mathbb{R}$, on dit que $f(x)$ tend vers l lorsque x tend vers $+\infty$ si :

$$\forall \epsilon > 0 \text{ , } \exists A \text{ tel que } x \in X \text{ et } x \geq A \Rightarrow |f(x) - l| \leq \epsilon$$

On définit aussi les expressions $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$; par exemple $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ signifie

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ , } \exists A \in \mathbb{R} \text{ tel que } x \in X \text{ et } x \geq A \Rightarrow f(x) \leq \alpha$$

Exemples :

1. $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$; $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$
2. $\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$; soit $\alpha \in \mathbb{R}$; comme $\ln(2^n) = n\ln(2)$ et comme $\ln(2) > 0$, on voit qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\ln(2^{n_0}) \geq \alpha$. D'où $x \geq 2^{n_0} \Rightarrow \ln(x) \geq \alpha$
3. Soit $a > 1$; posons $f(n) = a^n$, pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Alors

$$\lim_{n\to+\infty} a^n = +\infty$$

On peut en effet écrire : $a = (1 + u)$; d'où d'après la formule du binôme : $a^n \geq 1 + nu \geq nu$; donc si $\alpha \in \mathbb{R}$, $a^n \geq \alpha$ dès que $n \geq \frac{|\alpha|}{u}$.
Supposons maintenant que $0 < a < 1$, posons $v_n = \left(\frac{1}{a^n}\right) = \left(\frac{1}{a}\right)^n$. Comme $\frac{1}{a} > 1$, ce qui précède montre que $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$; il s'ensuit que $a^n = \frac{1}{v_n}$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

3 Continuité

Définition 1.3 *Soit* $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$ *et soit* $a \in X$ *; on dit que* f est continue au point a si $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ *; cela revient à dire que pour tout* $\epsilon > 0$ *donné, on peut trouver un nombre* $\eta > 0$ *tel que :*

$$x \in X \text{ et } |x - a| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

On dit que f *est continue si elle est continue en tout point de* X

Interprétation graphique : f est continue en $a \in X$ si le point $M_x = (x, f(x))$ de T_f "tend" vers M_a lorsque x tend vers a. Intuitivement, si $f : I \to \mathbb{R}$ est continue sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$, le point M_x varie de façon continue avec x, et le graphe T_f se présente comme un tracé continu qu'on peut obtenir sans faire de sauts (donc sans lever le stylo). Remarquons qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ telle que, $|f(x) - f(x')| \leq |x - x'|$ pour tout $x, x' \in X$ est une fonction continue.

Exemple : $f(x) = x, x \in \mathbb{R}$ est continue sur $\mathbb{R}$ (évidemment $|f(x) - f(x')| \leq |x - x'|$). De même $f(x) = |x|, x \in \mathbb{R}$ est continue sur $\mathbb{R}$ (on a $||x| - |x'|| \leq |x - x'|$ pour $x, x' \in \mathbb{R}$)
Les fonction continues possèdent la propriété fondamentale suivante :

Théorème 1.1 (Théorème des valeurs intermédiaires) *Soient* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue sur l'intervalle* $[a, b]$ *et* γ *un réel compris entre* $f(a)$ *et* $f(b)$ *: il existe alors au moins un nombre* $c \in [a, b]$ *tel que* $f(c) = \gamma$*. Ainsi toute valeur comprise entre* $f(a)$ *et* $f(b)$ *est atteinte (au moins une fois).*

Interprétation graphique : on ne peut joindre les points $M_a = (a, f(a))$ et $M_b = (b, f(b))$ qui sont situés de part et d'autre de la droite horizontale $y = \gamma$, par un tracé continu sans couper cette horizontale au moins une fois.

Application : il existe un nombre unique x_0 tel que $\ln(x_0) = 1$:
comme $\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ et $\ln(1) = 0$ il existe $b > 1$ tel que $\ln(b) > 1$. En appliquant le théorème des valeurs intermédiaires avec $a = 1$, $b > 1$ et $\gamma = 1$ (qui est bien compris entre $0 = \ln(1)$ et $\ln(b)$), on voit qu'il existe au moins un x_0 tel que $\ln(x_0) = 1$. Comme $\ln(x)$ est une fonction strictement croissante de x, il ne peut y avoir plus d'une solution x de l'équation $\ln(x) = 1$. (Cette solution est le nombre noté habituellement $e \approx 2.71828...$).
La propriété des valeurs intermédiaires permet de définir des fonctions réciproques :

Théorème 1.2 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue strictement croissante : alors, $J = f(I)$ l'ensemble des valeurs de f est un intervalle, et f admet une fonction réciproque $g : J \to \mathbb{R}$, continue et strictement croissante sur J.*

Rappels :
- f croissante sur I signifie : si $x, y \in I : x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$
- f strictement croissante sur I signifie : quel que soit $x, y \in I : x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$

Le fait que J soit un intervalle découle facilement du théorème des valeurs intermédiaires ; la fonction g associe à chaque $x \in J$ l'unique nombre $t \in I$ tel que $f(t) = x$; on a $f(g(x)) = x$, pour $x \in J$ et $g(f(x)) = x$, pour $x \in I$.

Exemple 1 : la fonction logarithme népérien, $\ln :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ est continue et strictement croissante ; la fonction réciproque de $\ln$ est la fonction $\exp : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ (noter que l'intervalle image de $]0, +\infty[$ par $\ln$ est égal à $\mathbb{R}$ puisque $\lim_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$) ; la fonction $\exp$ est continue et strictement croissante ; on a $\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$, $\lim_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$. De plus :

$$\begin{aligned} \forall x, y \in \mathbb{R}\ ,\ \exp(x+y) &= \exp(x)\exp(y) \\ \exp(0) = 1 \quad &, \quad \exp(1) = e \end{aligned}$$

On notera $\exp(x) = e^x$ (e est défini par $\ln(e) = 1$).

3.1 Application à la définition de x^α

Pour $x > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose :

$$x^\alpha = \exp(\alpha \ln(x))$$

On a alors, pour $x, y > 0$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, les relations :

$$\begin{aligned} \ln(x^\alpha) &= \alpha \ln(x) \\ x^{\alpha+\beta} &= x^\alpha x^\beta \\ (x^\alpha)^\beta &= x^{\alpha\beta} \\ x^\alpha y^\alpha &= (xy)^\alpha \end{aligned}$$

$f(x) = x^\alpha$ est strictement croissante pour $\alpha > 0$, strictement décroissante pour $\alpha < 0$ et pour $\alpha = 0$, f est égale à la constante 1.

4 Opérations sur les limites

Théorème 1.3 *Soient $f, g : X \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, $l_1 = \lim_{x\to a} f(x)$, $l_2 = \lim_{x\to a} g(x)$ avec l_1 et l_2 finis. Alors :*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) &= l_1 + l_2\\ \lim_{x\to a}(f(x)g(x)) &= l_1 l_2\\ \lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{l_1}{l_2} &\text{ (si } l_2 \neq 0)\end{aligned}$$

Ces relations sont assez intuitives ; voici une preuve de la première relation en supposant a fini ; soit $\epsilon > 0$; comme $l_1 = \lim_{x\to a} f(x)$ et $l_2 = \lim_{x\to a} g(x)$ on peut trouver deux nombres positifs, η_1 et η_2 tels que :

$$\begin{cases} x \in X \text{ et } |x-a| < \eta_1 \Rightarrow |f(x) - l_1| < \epsilon/2 \\ x \in X \text{ et } |x-a| < \eta_2 \Rightarrow |fg(x) - l_2| < \epsilon/2 \end{cases}$$

Notons η le plus petit des deux nombres η_1 et η_2 ; pour $x \in X$ et $|x-a| < \eta$, on aura :

$$|(f(x)+g(x))-(l_1+l_2)| = |(f(x)-l_1)+(g(x)-l_2)| \leq |f(x)-l_1|+|g(x)-l_2| \leq \epsilon/2+\epsilon/2 = \epsilon$$

on a donc vérifié que $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = l_1 + l_2$

Corollaire 1.1 *si $f, g : X \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions continues sur X alors, les fonctions $f(x) + g(x)$, $f(x)g(x)$ sont continues sur X. Si g ne s'annule pas sur X, $f(x)/g(x)$ est continue sur X.*

Exemple : $f(x) = x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$. Plus généralement, si n est un entier positif $x \mapsto x^n$ est continue sur $\mathbb{R}$. On en déduit qu'un polynôme $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ est continu sur $\mathbb{R}$.

Dans le cas où les limites l_1 ou l_2 sont infinies, on peut conclure dans certains cas, en utilisant les règles :
- $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$;
- $+\infty + l = +\infty$ pour $l \in \mathbb{R}$;
- $a \times (+\infty) = +\infty$ pour $a > 0$;
- $\frac{1}{+\infty} = 0$;
- etc.

Il reste des cas où on ne peut pas conclure sans informations supplémentaires sur l'allure de $f(x)$ et $g(x)$ quand $x \to a$; on dit alors qu'il s'agit de formes indéterminées : par exemple :
- $(+\infty) - (+\infty)$;
- $(+\infty) \times 0$;
- $0/0$;
- $\frac{+\infty}{+\infty}$;
- etc.

Exemple : Soit $f(x) = \frac{a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n}{b_0+b_1x+\cdots+b_px^p}$ une fraction rationnelle (quotient de deux polynômes), a_n et b_p étant supposés non nuls ; étudions $f(x)$ pour x tendant vers $+\infty$. On écrit :

$$f(x) = \frac{x^n}{x^p}\frac{\frac{a_0}{x^n}+\frac{a_1}{x^{n-1}}+\cdots+a_n}{\frac{b_0}{x^p}+\frac{b_1}{x^{b-1}}+\cdots+b_p} = x^{n-p}\left(\frac{a_n+\frac{a_{n-1}}{x}+\cdots+\frac{a_0}{x_n}}{b_p+\cdots+\frac{b_0}{x_p}}\right)$$

on sait que

$$\lim_{n\to+\infty} x^n = \begin{cases} +\infty \text{ si } n \geq 1 \\ 1 \quad \text{si } n = 0 \\ 0 \quad \text{si } n \leq -1 \end{cases}$$

On en déduit déjà que le facteur de x^{n-p} dans le dernier membre tend vers ${}^{a_n}\!/_{b_p}$. D'où la conclusion suivante, en supposant a_n et b_p de même signe :

$$\lim_{n\to+\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty \text{ si } n > p \\ {}^{a_n}\!/_{b_p} \text{ si } n = p \\ 0 \quad \text{si } n < p \end{cases}$$

Théorème 1.4 *Si $f, g, h : X \to \mathbb{R}$ sont trois fonctions telles que $g \leq f \leq h$ sur X. Si $\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} h(x) = l$ alors f admet une limite en a et $\lim_{x\to a} f(x) = l$.*

Théorème 1.5 (Composition des limites) *Soient $f : X \to \mathbb{R}$, $g : Y \to \mathbb{R}$ deux fonctions ($X, Y \subset \mathbb{R}$), et $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. On suppose que $\lim_{x\to a} f(x) = l$ (l fini ou non), et que $\lim_{x\to l} g(x) = l'$. La composée $g \circ f$ est définie sur $X' = \{x \in X ; f(x) \in Y\}$. Si on peut faire tendre x vers a, avec $x \in X'$ (*i.e.* X' contient des points arbitrairement voisins de a), on a alors :*

$$\lim_{x\to a} g(f(x)) = l'$$

Intuitivement, quand x tend vers a, $f(x)$ tend vers l et $g(f(x))$ tend vers l' puisque $g(u)$ tend vers l' lorsque u tend vers l.

Corollaire 1.2 *La composée de deux fonctions continues est continue.*

Exemples :

1. $|\sin(x)|$, $\ln(2 + \sin(x))$ sont continues sur $\mathbb{R}$
2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$; $x \to x^\alpha$ est continue sur $]0, +\infty[$.
   - Si $\alpha > 0$, on a : $\lim_{x\to 0} x^\alpha = 0$, $\lim_{x\to+\infty} x^\alpha = +\infty$.
   - Si $\alpha < 0$, $\lim_{x\to 0} x^\alpha = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} x^\alpha = 0$.
3. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)}{x^2} = 1$; $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{x} = 3$; $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{\sin(5x} = \frac{3}{5}$.
   (On écrit $\frac{\sin(3x)}{x} = 3 \times \left(\frac{\sin(3x)}{3x}\right)$; $\frac{\sin(3x)}{\sin(5x)} = \frac{3}{5} \times \left(\frac{\sin(3x)}{3x}\right) \times \left(\frac{5x}{\sin(5x)}\right)$

5 Exercices

1. **Vrai ou Faux ?**
   (a) Une fonction n'admet de limite en un point a que si elle est définie en a ;
   (b) la composée de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ est continue sur $\mathbb{R}$;
   (c) l'image d'un intervalle par une fonction croissante est un intervalle ;
   (d) l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle ;
   (e) toute fonction périodique et croissante est continue.
2. calculer
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2(n-3)}{(n-1)(2-n)^2}$$
3. Montrer que si $|a| < 1$,
$$\frac{1}{1-a} = \lim_{n\to+\infty} \left\{1 + a + a^2 + \cdots + a^n\right\}$$
4. Montrer que pour $a > 1$,
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n} = +\infty$$
(écrire $a^n = (1+u)^n$ et minorer $(1+u)^n$ par un des termes du développement de $(1+u)^n$).
Montrer que
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n^2} = +\infty$$
5. Calculer
$$\lim_{x\to 1} \left\{\frac{1}{(x-1)} - \frac{2}{x^2-1}\right\}$$
6. Calculer
$$\lim_{x\to+\infty} x \sin\left(\frac{2}{x}\right)$$
7. Montrer que l'équation $\cos x = x$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[0, \pi/2]$
8. Montrer qu'un polynôme de degré impair admet au moins une racine réelle.
9. Soit f une fonction numérique définie et continue sur l'intervalle $[0, 1]$ de $\mathbb{R}$, telle que :
$$f(0) = f(1)$$
Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, il existe un point x_0 de $[0, 1]$ tel que :
$$f\left(x_0 + \frac{1}{n}\right) = f(x_0)$$
(considérer la fonction $g(x) = f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)$ sur $[0, 1 - 1/n]$ et exprimer $f(1) - f(0)$ en fonction de g).

10. Trouver, à l'aide de la représentation graphique des fonctions $\sin(2x)$ et $\sin(3x)$, le nombre de solutions de l'équation $\sin(2x) = \sin(3x)$ sur l'intervalle $[0, \pi/2]$
11. Résoudre l'équation :
$$\ln\left(x^{7/8}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{x}\right) = 1$$
12. Montrer que pour $\alpha < 0$, la fonction $f_\alpha = x^\alpha$ est une bijection de $]0, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$, et calculer la fonction réciproque de f_α
13. Résoudre l'équation $e^{\sin x} = 1$. Résoudre l'inéquation $e^{\sin x} < 1$.

Chapitre 2

Dérivées des fonctions d'une variable

1 Définition

Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction dont le domaine de définition X est un intervalle de $\mathbb{R}$ (ou plus généralement un intervalle privé de quelques points) et soit a un point de X ; on dit que f est dérivable au point a si la limite $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est finie ; cette limite est alors la dérivée de f en a, et on écrit :

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Remarques :

1. Posons $f(x) = mx + p$ (m, p réels fixés) ; si $a \in \mathbb{R}$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \neq a$: $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = m$; d'où on déduit que f est dérivable en a et $f'(a) = m$. Rappelons que le graphe de f est une droite (D) et remarquons que si $M_1 = (x_1, y_1)$ et $M_2 = (x_2, y_2)$ sont deux points distincts de (D) on a : $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$. On dit que m est la pente de (D).
2. Si f est dérivable au point a, elle est continue en ce point.

Interprétation géométrique : considérons une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ dérivable en $a \in X$, et soit T_f le graphe de f ; pour $x \in X$, $x \neq a$, $p_x = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est la pente de la droite D_x passant par $M_a = (a, f(a))$ et $M_x = (x, f(x))$: $f'(a)$ est la limite des pentes p_x pour x tendant vers a. On voit alors que la droite (D) de pente $f'(a)$ et passant par M_a est la position limite des droites (D_x). On dit que (D) est la tangente à T_f au point M_a.
L'équation de D est :

$$y = f(a) + f'(a)(x-a) \tag{2.1}$$

pour (x, y) sur D et $x \neq a$, $\frac{y-f(a)}{x-a}$ vaut la pente de D ; d'où $\frac{y-f(a)}{x-a} = f'(a)$ et l'équation 2.1.

Exemples :

1. $f(x) = \sin(x)$
   Pour $x \neq a$, $a \in \mathbb{R}$, on a $f(x) - f(a) = 2\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)\cos\left(\frac{x+a}{2}\right)$.

Comme $\lim_{u\to 0}\frac{\sin(u)}{u}=1$, on a, par le théorème de composition des limites : $\lim_{x\to a}\left(\frac{2}{x-a}\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)\right)=1$. Par conséquent : $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\cos(a)$.
f est donc dérivable et $f'(x)=\cos(x)$

2. On montre de même que $\cos(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et que $(\cos(x))'=-\sin(x)$
3. $f(x)=\ln(x)$: f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $f'(x)=\frac{1}{x}$.

Notation différentielle : si f est dérivable au point $x\in X$, $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ d'où, si on note $\Delta x=h$ (accroissement de la variable entre x et $x+h$) et $\Delta f=f(x+h)-f(x)$ (accroissement correspondant de f) : $f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}$; symboliquement on écrit :

$$f'(x)=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$$

Intuitivement $\mathrm{d}x$ est un accroissement infinitésimal de la variable x, $\mathrm{d}f=f(x+\mathrm{d}x)-f(x)$ est l'accroissement correspondant de f.

2 Opérations sur les dérivées

Théorème 2.1 *Soient $f,g:X\to\mathbb{R}$ deux fonctions dérivables au point $a\in X$; alors les fonctions $f(x)+g(x)$, $f(x)g(x)$ (et ${}^{f(x)}/_{g(x)}$ si $g(a)\neq 0$) sont dérivables au point a, et on a les formules :*

$$\begin{aligned}(f+g)'(a)&=f'(a)+g'(a)\\ (fg)'(a)&=f'(a)g(a)+f(a)g'(a)\\ \left({}^{f(a)}/_{g(a)}\right)'&=\frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{g(a)^2}\qquad \textit{si } g(a)\neq 0\end{aligned}$$

Cas particulier : si $u:X\to\mathbb{R}$ est dérivable, $v(x)=(u(x))^2$ est dérivable de dérivée $2u(x)u'(x)$; plus généralement, si n est un entier strictement positif, $w(x)=(u(x))^n$ est dérivable et $w'(x)=n(u(x))^{n-1}u'(x)$. Cette formule se démontre par récurrence pour $n\geq 1$. On peut d'ailleurs montrer qu'elle est encore vraie pour n entier négatif si $u(x)$ ne s'annule pas.

Exemples :

1. Tout polynôme $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)=a_1+2a_2x+\cdots+na_nx^{n-1}$.
2. $f(x)=\tan(x)$ est dérivable (sur son domaine de définition) et on a :

$$f'(x)=\frac{1}{\cos^2(x)}=1+\tan^2(x),\text{ pour } x\neq\tfrac{\pi}{2}+k\pi \text{ (pour tout } k\in\mathbb{Z})$$

Théorème 2.2 *Soient $f : X \to \mathbb{R}$, $g : Y \to \mathbb{R}$ deux fonctions et $a \in X$; on suppose que $g \circ f$ est (au voisinage de a) définie sur un intervalle contenant le point a, que f est dérivable en a et que g est dérivable au point $f(a)$. Alors $g(f(x))$ est dérivable en a et :*

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a)$$

Démonstration : (en supposant f strictement croissante sur X) ; pour $h \neq 0$ et assez petit, on a :

$$\frac{g(f(a+h)) - g(f(a))}{h} = \left(\frac{g(f(a+h)) - g(f(a))}{f(a+h) - f(a)}\right)\left(\frac{f(a+h) - f(a)}{h}\right)$$

lorsque h tend vers 0, la première parenthèse du second membre tend vers $g'(f(a))$: c'est une conséquence de la définition de la dérivée de g au point $f(a)$ et du théorème de composition des limites. Par conséquent, le premier membre admet une limite pour $h \to 0$ et cette limite est $g'(f(a))f'(a)$.

Exemples :

1. $f(x) = \sin(2x)$: $f'(x) = 2\cos(2x)$
2. $f(x) = \ln(|x|)$, $(x \neq 0)$: $f'(x) = \frac{1}{x}$ pour tout $x \neq 0$
3. si $u : X \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable, alors $\ln(|u(x)|)$ est dérivable en tout point $x \in X$ tel que $u(x) \neq 0$ et :

$$\frac{\mathrm{d}\ln(|u(x)|)}{\mathrm{d}x} = \frac{u'(x)}{u(x)} \text{ (si } u(x) \neq 0)$$

Ainsi : $\frac{\mathrm{d}\ln(|\sin(x)|)}{\mathrm{d}x} = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \cot(x)$ pour $x \neq 0$ modulo π.

3 Théorème des accroissements finis

Théorème 2.3 *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur l'intervalle $[a, b]$, $a < b$: il existe alors au moins un point c dans l'intervalle $]a, b[$ tel que :*

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$$

Interprétation graphique : on aura $\frac{f(b)-f(a)}{(b-a)} = f'(c)$: autrement dit, la pente de la corde AB joignant $A = (a, f(a))$ à $B = (b, f(b))$ est égale à la pente de la tangente à la courbe $y = f(x)$ au point $M_c = (c, f(c))$. Le théorème affirme donc l'existence d'un point M sur la courbe représentative T_f de f, tel que la tangente en M à T_f est parallèle à la corde AB.

Justification intuitive : on suppose que T_f n'est pas entièrement situé sous la corde AB ; considérons une droite : (D_p) d'équation $y = mx + p$, de pente $m = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, le paramètre p étant variable. Pour p suffisamment grand, (D_p) est situé au dessus de T_f ; en diminuant p, on obtient une valeur $p_0 \in \mathbb{R}$, telle que (D_{p_0}) est au dessus de T_f, et rencontre T_f en un point (x_0, y_0) ; la disposition relative de T_f et (D_{p_0}) implique $f'(x_0) = m$

Conséquences fondamentales : notons $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur l'intervalle I, alors :

1. si $f'(x) = 0$ sur I, f est constante sur l'intervalle I ;
2. si $f'(x) \geq 0$ sur I, f est croissante sur l'intervalle I ;
3. si $f'(x) > 0$ sur I, f est strictement croissante sur l'intervalle I.

Montrons par exemple la conséquence 3 : si $a, b \in I$, $a < b$, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$; d'où, puisque $f'(x) > 0$, $f(b) - f(a) > 0$ et $f(a) < f(b)$. On a des énoncés analogues si $f'(x) \leq 0$ sur I, ou si $f'(x) < 0$ sur I. Quelles réciproques peut-on énoncer ?

Corollaire 2.1 *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$, F et G deux primitives de f sur I (c'est-à-dire que F et G sont dérivables et telles que $F'(x) = G'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$). Alors $F(x) - G(x)$ est constante sur I : $F(x) = G(x) + C$, pour $x \in I$ et $C \in \mathbb{R}$. En particulier si $F(x_0) = G(x_0)$ pour un point $x_0 \in I$, alors $F(x) = G(x)$ pour tout $x \in I$.*

Attention : toutes les propriétés énoncées ici s'appliquent à des **intervalles** I ; ces propriétés peuvent tomber en défaut si I n'est pas un intervalle, par exemple :

1. $f(x) = \tan(x)$, $x \in X = \left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, +\frac{3\pi}{2}\right[$ Alors $f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} > 0$ mais f n'est pas croissante sur X.
2. $f(x) = -\frac{1}{x^2}$, $X =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$; les primitives de f sont des fonctions de la forme :
$$F(x) = \begin{cases} 1/x + C_1 \text{ si } x < 0 \\ 1/x + C_2 \text{ si } x > 0 \end{cases}$$
où C_1 et C_2 sont deux réels quelconque ; on voit que deux primitives quelconques de f sur X ne diffèrent pas en général d'une constante.

Application à la définition de $\ln(x)$: la fonction logarithme népérien est l'unique fonction dérivable $F :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ telle que :

1. $F'(x) = \frac{1}{x}$ pour $x > 0$;
2. $F(1) = 0$.

On note $F(x) = \ln(x)$. (on peut aussi utiliser la notation $\text{Log}(x)$.

L'unicité de F découle du corollaire 2.1 ; nous admettrons l'existence de F (voir le chapitre sur l'intégrale). Puisque $F'(x) > 0$, $\ln(x)$ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$. On a aussi la propriété fondamentale :

$$\forall a, b > 0\ ,\ \ln(ab) = \ln(a) + \ln(b) \tag{2.2}$$

Pour établir cette relation, on remarque que pour $a \in]0, +\infty[$ fixé, les fonctions $f(x) = \ln(ax)$ et $g(x) = \ln(a) + \ln(x)$ ont la même dérivée sur $]0, +\infty[$: $f'(x) = g'(x) = \frac{1}{x}$. Comme de plus $f(1) = g(1) = \ln(a)$, on a $f(x) = g(x)$. L'équation 2.2 correspond à $x = b$.

3.1 *Convexité, concavité*

Définition 2.1 *On dit que la fonction $f : I \to \mathbb{R}$ (I intervalle) est convexe si, pour tout $a, b \in I$, $a < b$, la courbe $y = f(x)$, ($a \le x \le b$) est située au dessous de la corde AB, où $A = (a, f(a))$, $B = (b, f(b))$.*

Formulation analytique de la convexité : soient $a, b \in I$, $a < b$ et $x_1 \in]a, b[$; on peut écrire x_1 sous forme de barycentre de a et b affectés de poids convenables :

$$x_1 = ta + (1-t)b \qquad \text{avec } 0 < t < 1$$

Un calcul facile montre qu'il faut prendre $t = \frac{b - x_1}{b - a}$. On montre que la hauteur h telle que (x_1, h) soit sur la corde AB vérifie :

$$h = tf(a) + (1-t)f(b)$$

Dire que $(x_1, f(x_1))$ est au-dessous de la corde AB revient donc à dire que :

$$f(ta + (1-t)b) \le tf(a) + (1-t)f(b) \tag{2.3}$$

Dire que $f : I \to \mathbb{R}$ (I intervalle) est convexe, c'est dire que l'inégalité 2.3 est vérifiée pour tout couple de points de I et tout $t \in [0, 1]$

Exercice : vérifier à l'aide de cette propriété que les fonctions $f(x) = |x|$, $g(x) = x^2$ sont convexes sur $\mathbb{R}$.

Définition 2.2 *On dit que $f : I \to \mathbb{R}$ (I intervalle) est concave si, pour tout $a, b \in I$, $a < b$, la courbe $y = f(x)$, ($a \le x \le b$) est située au dessus de la corde AB, où $A = (a, f(a))$, $B = (b, f(b))$.*

f est concave sur I si et seulement si la fonction $x \mapsto -f(x)$ est convexe sur I.
On peut caractériser très simplement la convexité de f à l'aide de la dérivée seconde de f (lorsqu'elle existe) :

Théorème 2.4 *Si f est deux fois dérivable sur l'intervalle I, f est convexe si et seulement si $f''(x)$ est positive sur I*

De même, f sera concave sur I si et seulement si $f''(x) \leq 0$ sur I.

Preuve :

- supposons f convexe, notons $M_x = (x, f(x))$ et fixons $a, b \in I$, $a < b$. Si h est positif, tel que $a + h < b$, la pente de la corde $M_a M_{a+h}$ est inférieure (ou égale) à celle de la corde $M_a M_b$ puisque M_{a+h} est situé sous la corde $M_a M_b$. Donc : $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, et en faisant tendre h vers 0, on obtient $f'(a) \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
  De même, la pente de $M_{b-h} M_b$ est supérieure ou égale à celle de $M_a M_b$; d'où $\frac{f(b-h)-f(b)}{-h} \geq \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, ($h > 0$) et en faisant tendre h vers 0, on obtient $f'(b) \geq \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
  Finalement, $f'(a) \leq f'(b)$: comme a et b sont arbitraires dans I tels que $a < b$ cela signifie que f' est croissante sur I et par conséquent $f''(x) \geq 0$ sur I.
- **Réciproque :** supposons $f''(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$; prenons $a, b, x_1 \in I$ tels que $a < x_1 < b$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]a, x_1[$ et $d \in]x_1, b[$ tels que :

  $$\text{pente}(M_a M_{x_1}) = f'(c) \text{ , pente}(M_{x_1} M_b) = f'(d)$$

  D'après l'hypothèse, f' est croissante sur I et par conséquent, $f'(c) \leq f'(d)$. On obtient donc :

  $$\text{pente}(M_a M_{x_1}) \leq \text{pente}(M_{x_1} M_b)$$

  Cette inégalité signifie que M_{x_1} est situé sous la corde $M_a M_b$. Ce qui montre que f est convexe.

Exemples :

1. $f(x) = \ln(x)$ est concave sur $]0, +\infty[$
2. $f(x) = x^2$, $g(x) = x^4$ sont convexes sur $\mathbb{R}$
3. $f(x) = \sin(x)$ est convexe sur $[-\pi, 0]$, concave sur $[0, \pi]$ convexe sur $[\pi, 2\pi]$, etc.

Position par rapport à la tangente : si $f : I \to \mathbb{R}$ est deux fois dérivable sur I, et convexe sur I, la courbe représentative de f est située au dessus de chacune de ses tangentes :

$$\forall a, x \in I \text{ , } f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a)$$

La preuve de ce résultat est directe en posant $F(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)$. On a $F''(x) = f''(x) \geq 0$ et $F'(x) = f'(x) - f'(a)$ et donc $F'(a) = 0$. On a aussi $F(a) = 0$. Le tableau de variation montre donc que $F(x) \geq 0$.

Exemple : on a $\sin(x) \leq x$ pour $x \in [0, \pi]$, d'après la concavité de $\sin(x)$ sur $[0, \pi]$. D'autre part, comme cette fonction est convexe sur $[-\pi, 0]$, $\sin(x) \geq x$ sur $[-\pi, 0]$.
Cette exemple conduit à la notion de point d'inflexion.

Définition 2.3 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$, une fonction deux fois dérivable sur l'intervalle I, on dit que la courbe $y = f(x)$ présente un point d'inflexion en $(x_0, f(x_0))$ ($x_0 \in I$) si $f''(x_0) = 0$ et si f'' change de signe en x_0.*

4 Dérivées des fonctions réciproques

Théorème 2.5 *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction strictement monotone et continue sur l'intervalle I, et $g : J \to \mathbb{R}$ la fonction réciproque de f. Si f est dérivable au point $a \in I$ et si $f'(a) \neq 0$, g est alors dérivable au point $b = f(a)$ et on a :*

$$g'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(g(b))}$$

Admettons la dérivabilité de g en b ; on a : $f(g(x)) = x$ pour tout $x \in J$. En dérivant les deux membres par rapport à x, on obtient pour $x = b$: $f'(g(b))g'(b) = 1$. D'où la relation.

Exemples :

1. $f(x) = e^x$ est la fonction réciproque de $\ln(x)$: elle est donc dérivable et :

$$f'(x) = \frac{1}{\ln'(e^x)} = \frac{1}{1/e^x} = e^x$$

On voit d'ailleurs que $f''(x) = \exp(x) \geq 0$ et que f est donc convexe sur $\mathbb{R}$

2. On en déduit la dérivée de $f_\alpha = x^\alpha$ ($x > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$) ;
on obtient, puisque $f_\alpha(x) = e^{\alpha \ln(x)}$:

$$f'_\alpha(x) = \frac{\alpha}{x} e^{\alpha \ln(x)} = \alpha e^{(\alpha-1)\ln(x)} = \alpha x^{\alpha-1}$$

D'où $f''(x) = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$ et on voit que :
- si $\alpha \geq 1$: f_α est convexe, croissante ;
- si $0 < \alpha \leq 1$: f_α est concave, croissante ;
- si $\alpha \leq 0$: f_α est convexe, décroissante ;

5 Fonctions trigonométriques inverses

5.1 $f(x) = \arcsin(x)$

On appelle $\arcsin(x)$ la fonction réciproque de la restriction de $\sin(x)$ à l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$; $\sin(x)$ définit une bijection croissante de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1, +1]$ et $\arcsin(x)$ est la bijection réciproque de $[-1, +1]$ sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
Si a et b sont deux réels, on a l'équivalence :

$$\left\{ \begin{array}{l} |b| \leq 1 \\ a = \arcsin(b) \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} |a| \leq \frac{\pi}{2} \\ b = \sin(a) \end{array} \right.$$

Plus concrètement, si $|x| \leq 1$, $\theta = \arcsin(x)$ est l'unique $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\sin\theta = x$.
Donc :

$$\begin{aligned}
\arcsin(0) &= 0 \\
\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) &= \frac{\pi}{4} \\
\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{\pi}{6} \\
\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) &= \frac{\pi}{3}
\end{aligned}$$

Dérivée

$\arcsin$ est dérivable sur $]-1, +1[$ et on a :

$$\arcsin(x)' = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Convexité, parité

$\arcsin(x)$ est impaire, convexe sur $[0, 1]$, concave sur $[-1, 0]$; l'origine des axes est un point d'inflexion de $y = \arcsin(x)$.

5.2 $f(x) = \arccos(x)$

On note $\arccos(x)$ la fonction réciproque de $f(x) = \cos(x)$, $0 \leq x \leq \pi$

$$\arccos : [-1, +1] \to [0, \pi]$$

Si $|x| \leq 1$, $\theta = \arccos(x)$ est l'unique $\theta \in [0, \pi]$ tel que $\cos(\theta) = x$.
On a :

$$\begin{aligned}
\cos(\arccos(x)) = x \quad &\text{si} \quad |x| \leq 1 \\
\arccos(\cos(x)) = x \quad &\text{si} \quad 0 \leq x \leq \pi
\end{aligned}$$

Exemples :
- $\arccos(-1) = \pi$
- $\arccos(0) = \frac{\pi}{2}$
- $\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$

Dérivée

$\arccos$ est dérivable sur $]-1, +1[$ et on a : $\arccos(x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

Exercice : Montrer que $\arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$ pour $|x| \leq 1$

5.3 $f(x) = \arctan(x)$

On note $\arctan(x)$ la fonction réciproque de $f(x) = \tan(x)$, $|x| < \frac{\pi}{2}$

$$\arctan : \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

c'est donc une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
Si $x \in \mathbb{R}$, $\theta = \arctan(x)$ est l'unique $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $|\theta| < \frac{\pi}{2}$ et $\tan(\theta) = x$.
On a :

$$\begin{aligned} \tan(\arctan(x)) &= x \qquad \forall x \in \mathbb{R} \\ \arctan(\tan(x)) &= x \qquad \text{si } |\theta| < \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Exemples :
- $\arctan(0) = 0$
- $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$
- $\arctan\left(\tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = -\frac{\pi}{4}$

Propriétés : $\arctan$ est continue, strictement croissante, impaire ; de plus :
- $\lim_{x\to+\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$
- $\lim_{x\to-\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}$

$\arctan$ est dérivable, et

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

6 Exercices

1. **Vrai ou Faux ?**
   (a) Toute fonction continue sur un intervalle I est dérivable sur I ;
   (b) toute fonction dérivable sur un intervalle I est continue sur I.
   (c) La dérivée du produit de deux fonctions dérivables est le produit de leurs dérivées.
   (d) si f et g sont deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ alors $(f \circ g)' = (f' \circ g)g'$
   (e) Si $|f'(x)| \leq M$, alors
   $$|f(b) - f(a)| \leq M(b - a) \tag{2.4}$$
2. Étudier la dérivabilité en 0 des fonctions :
   (a) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} \text{ si } x \geq 0 \\ 0 \quad \text{si } x < 0 \end{cases}$
   (b) $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \quad\quad\; \text{si } x = 0 \end{cases}$
3. Calculer les dérivées successives des fonctions :
   (a) $f(x) = x^3 + 1$ ($x = 0$ est-il un extremum ?)
   (b) $f(x) = \cos(x)$;
   (c) $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$;
   (d) $\sin(x) - x\cos(x)$;
   (e) $x \ln(x)$;
   (f) $e^x \cos(x)$.
4. (a) Étudier la variation de la fonction numérique f définie par la formule :
   $$x \mapsto \frac{\cos(4x)}{\cos^4(x)}$$
   Déterminer les points d'inflexion du graphe de f
   (b) Montrer que $f(x)$ peut se mettre sous la forme d'un polynôme en $\tan(x)$. Résoudre directement l'équation :
   $$\tan^4(x) - 6\tan^2(x) + 2 = 0$$
   Retrouver le résultat obtenu à l'aide de la première question.
5. En utilisant l'inégalité 2.4 de l'exercice 1, montrer que :
   (a) pour tout nombre réel x non nul :
   $$-1 \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq 1$$

(b) Pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0, 1]$:

$$1 + x \leq e^x \leq 1 + ex$$

(c) pour x_1 et x_2 nombres réels tels que $0 < x_1 \leq x_2$:

$$\frac{x_2 - x_1}{x_2} \leq \ln \frac{x_2}{x_1} \leq \frac{x_2 - x_1}{x_1}$$

(d) pour tout couple (x, y) de nombres réels appartenant à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$:

$$|\tan(x) - \tan(y)| \geq |x - y|$$

6. Utiliser l'inégalité 2.4 de l'exercice 1 pour obtenir une majoration des nombres réels :

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{33} - \sqrt{32} \\ B &= \ln(1500) - \ln(1498) \end{aligned}$$

7. Deux oiseaux sont perchés chacun sur un pylône de téléphérique (différent l'un de l'autre) ; ils s'envolent en même temps et vont se poser au même instant sur l'autre pylône. Formuler mathématiquement l'hypothèse qui permet d'affirmer qu'il existe un instant où ils sont à la même altitude.
8. Soient a et b deux nombres réels tels que $0 < b < a$. Comparer les dérivées des trois fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} x &\mapsto \arctan\left(\frac{\sqrt{a^2 - b^2}\sin(x)}{b + a\cos(x)}\right) \\ x &\mapsto 2\arctan\left(\frac{a - b}{\sqrt{a^2 - b^2}\tan\frac{x}{2}}\right) \\ x &\mapsto \arccos\left(\frac{b + a\cos(x)}{a + b\cos(x)}\right) \end{aligned}$$

Déterminer l'ensemble des points de $\mathbb{R}$ pour lesquels ces trois fonctions coïncident.
9. Formule de Leibniz
Soient f et g deux fonctions n fois dérivables sur un intervalle I. Montrer que le produit fg est n fois dérivable sur I et montrer que :

$$(fg)^{(n)} = C_0^n f^{(n)} g + C_1^n f^{(n-1)} g' + \cdots + C_p^n f^{(n-p)} g^{(p)} + \cdots + C_n^n f g^{(n)}$$

où $C_p^n = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ sont les coefficients binomiaux
10. Utiliser la formule de Leibniz pour calculer les dérivées successives des fonctions :
   (a) $f(x) = (x^4 + 1)\sin(x)$
   (b) $f(x) = e^x \cos(x)$

11. En dérivant de deux manières la fonction :

$$x \mapsto (1+x)^n$$

calculer :

(a) $C_1^n + 2C_2^n + 3C_3^n + \cdots + nC_n^n$

(b) $C_1^n + 2^2C_2^n + 3^2C_3^n + \cdots + n^2C_n^n$

12. (a) Montrer que, pour tout couple de réels positifs a et b tels que $ab < 1$, on a la relation :

$$\arctan(a) + \arctan(b) = \arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right)$$

(b) Montrer que pour tout entier n positif, on a :

$$\arctan\left(\frac{1}{2n-1}\right) - \arctan\left(\frac{1}{2n+1}\right) = \arctan\left(\frac{1}{2n^2}\right)$$

(c) Soit n un entier positif. Déduire de ce qui précède une forme simple pour la somme :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{1}{2k^2}\right)$$

13. Montrer que la fonction $\ln(1+e^x)$ est une fonction convexe.

Chapitre 3

Polynômes

1 Définition

Définition 3.1 *On appelle polynôme à coefficients réels de degré n, toute fonction de la forme :*

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \end{cases} \qquad \textit{avec } a_i \in \mathbb{R}, a_n \neq 0$$

Si $a_n = 1$ on dit que le polynôme est *unitaire*.
Si $P(x) = a_n x^n$ on dit que $P(x)$ est un monôme de degré n.
L'ensemble des polynômes dont le degré égal à 0 est constitué des polynômes constants.
L'ensemble des polynômes dont le degré est égal à 1 est constitué de l'ensemble des droites.

2 Opérations sur les polynômes

2.1 Somme

Soient $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ et $g(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j$ deux polynômes à coefficients réels, la somme $f + g$ est un polynôme de degré $t = \sup(n, m)$ défini par :

$$f(x) + g(x) = \sum_{l=0}^{t} (a_l + b_l) x^l$$

(avec la convention de considérer comme nuls les coefficients d'indice supérieur au degré).
Le degré de $f + g$ est donc inférieur ou égal au maximum des degrés de chacun des polynômes. On a égalité si les termes de plus haut degré ne s'annulent pas.

Exemple : La somme de $f(x) = 3x^2 + 4$ et de $g(x) = -x^2 + 2x + 5$ est le polynôme de degré 2 : $(3 - 1)x^2 + (0 + 2)x + (4 + 5) = 2x^2 + 2x + 9$

2.2 Produit

Soient $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ et $g(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j$ deux polynômes à coefficients réels, le produit fg est un polynôme de degré $s = n + m$ défini par :

$$f(x)g(x) = \sum_{l=0}^{s} \left(\sum_{k=0}^{l} a_k b_{l-k} \right) x^l$$

(avec la convention de considérer comme nuls les coefficients d'indice supérieur au degré).
Le degré du polynôme fg est la somme des degrés de f et g et de coefficient $a_n b_m$.

Exemple : Le produit de $f(x) = 3x^2 + 4$ et de $g(x) = -x^2 + 2x + 5$ est le polynôme de degré 4 :

$$\begin{aligned} (3x^2+4) \times (-x^2+2x+5) &= -3x^4 + 6x^3 + 15x^2 - 4x^2 + 8x + 20 \\ &= -3x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 8x + 20 \end{aligned}$$

2.3 Premières propriétés

Théorème 3.1 *Soit $f(x)$ le polynôme $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, ce polynôme est la fonction nulle si et seulement si tous ses coefficients sont nuls.*

Ce théorème signifie qu'une fonction polynôme s'identifie à la suite de ses coefficients.

Corollaire 3.1 *Deux fonctions polynômiales f et g égales ont mêmes coefficients.*

Pour démontrer ce corollaire, il suffit de considérer $f - g$ et d'appliquer le théorème précédent.

Corollaire 3.2 *Le produit de deux polynômes non nuls est un polynôme non nul.*

Démonstration : sinon, tous les coefficients du produit seraient nuls ; si f est de degré n, de coefficient dominant a_n et g de degré m, de coefficient dominant b_m, fg est de degré $m + n$ avec coefficient dominant $a_n b_m \neq 0$.

On peut également traduire ceci en disant que si le produit de deux polynômes est nul c'est que l'un d'eux est le polynôme nul. Une conséquence pratique est que si l'on a l'égalit'e $fg = fh$ entre polynômes avec $f \neq 0$, alors $g = h$.

3 Division Euclidienne

Théorème 3.2 *Étant donné un polynôme $A(x)$ et un polynôme non nul $B(x)$, il existe un couple unique $(Q(x); R(X))$ de polynômes tels que*

$$A(x) = B(x)Q(x) + R(x) \qquad x \in \mathbb{R}$$

avec degré(R)< degré(B).
On dit que l'on a effectué la division euclidienne du polynôme $A(x)$ par $B(x)$; $Q(x)$ est le quotient, $R(x)$ le reste.
Si le reste est nul, on dit que $B(x)$ divise $A(x)$.

Nous allons montrer ce théorème sur un exemple.

Exemple : divisons le polynôme $A(x)$ par le polynôme $B(x)$ avec :

$$\begin{aligned} A(x) &= 2x^4 - 3x^3 + 5x^2 + 7x - 2 \\ B(x) &= x^2 + x - 2 \end{aligned}$$

Au préalable, on aura ordonné les deux polynômes suivant les puissances décroissantes de x. On dispose les polynômes de la façon suivante :

$$\begin{array}{r|l} 2x^4 - 3x^3 + 5x^2 + 7x - 2 & x^2 + x - 2 \\ \cline{2-2} & \end{array}$$

Divisons le premier terme du dividende par le premier terme du diviseur :

$$2x^4 : x^2 = 2x^2$$

Inscrivons le résultat sous le diviseur (c'est le premier terme du quotient). Nous obtenons :

$$\begin{array}{r|l} 2x^4 - 3x^3 + 5x^2 + 7x - 2 & x^2 + x - 2 \\ \cline{2-2} & 2x^2 \end{array}$$

Multiplions le terme obtenu par le diviseur :

$$2x^2(x^2 + x - 2) = 2x^4 + 2x^3 - 4x^2$$

et soustrayons le résultat du dividende :

$$\begin{array}{r|l} 2x^4 - 3x^3 + 5x^2 + 7x - 2 & x^2 + x - 2 \\ \cline{2-2} -2x^4 - 2x^3 + 4x^2 \qquad\qquad & 2x^2 \\ \hline -5x^3 + 9x^2 + 7x - 2 & \end{array}$$

Recommençons le processus en divisant le premier terme du polynôme résiduel par le premier terme du diviseur. Nous obtenons ainsi le deuxième terme du diviseur. Celui-ci est alors multiplié par le diviseur et le résultat soustrait du polynôme résiduel :

$$\begin{aligned} &-5x^3 : x^2 = -5x \\ &-5x(x^2 + x - 2) = -5x^3 - 5x^2 + 10x \end{aligned}$$

$$
\begin{array}{r|l}
2x^4 - 3x^3 + 5x^2 + 7x - 2 & x^2 + x - 2 \\ \cline{2-2}
-2x^4 - 2x^3 + 4x^2 & 2x^2 - 5x \\ \cline{1-1}
-5x^3 + 9x^2 + 7x - 2 & \\
5x^3 + 5x^2 - 10x & \\ \cline{1-1}
14x^2 - 3x - 2 &
\end{array}
$$

On recommence ces étapes jusqu'à ce que le degré du polynôme résiduel soit strictement inférieur au degré du diviseur (le polynôme résiduel est alors le reste de la division). Ce qui donne la division complète :

$$
\begin{array}{r|l}
2x^4 - 3x^3 + 5x^2 + 7x - 2 & x^2 + x - 2 \\ \cline{2-2}
-2x^4 - 2x^3 + 4x^2 & 2x^2 - 5x + 14 \\ \cline{1-1}
-5x^3 + 9x^2 + 7x - 2 & \\
5x^3 + 5x^2 - 10x & \\ \cline{1-1}
14x^2 - 3x - 2 & \\
-14x^2 - 14x + 28 & \\ \cline{1-1}
17x + 26 &
\end{array}
$$

Le quotient est donc :

$$Q(x) = 2x^2 - 5x + 14$$

et le reste :

$$R(x) = -17x + 26$$

3.1 *Cas particulier : division d'un polynôme $P(x)$ par $x - a$*

Puisque le degré du reste est strictement inférieur au degré du diviseur, le reste est un réel.

Théorème 3.3 *Le reste de la division du polynôme non nul $P(x)$ par $x - a$ vaut $P(a)$*

Autrement dit, le reste de la division du polynôme $P(x)$ par $x - a$ est la valeur obtenue en remplaçant x par a dans le polynôme.

4 Racine(s) d'un polynôme

Définition 3.2 *On dit que $a \in \mathbb{R}$ est racine du polynôme $P(x)$ si $P(a) = 0$*

En utilisant le théorème 3.3, on voit que cette définition implique :

Théorème 3.4 *Le polynôme $P(x)$ admet a pour racine si et seulement si il est divisible par $x - a$.*

Corollaire 3.3 *Si le polynôme $P(x)$ possède t racines distinctes $a_1, a_2, \ldots, a_t$ alors $P(x)$ est divisible par $(x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_t)$*

Si a_1 est racine, on peut écrire $P(x) = (x - a_1)P_1(x)$; puisque $a_2 \neq a_1$ est racine de $P(x)$, il est racine de $P_1(x)$, etc...

Corollaire 3.4 *Un polynôme de degré n possède au plus n racines distinctes.*

Soient $a_1, a_2, \ldots, a_t$ les racines distinctes de $P(x)$ on a $P(x) = (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_t)$. En comparant les degrés des deux membres, on voit que le degré de $Q(x)$ est 0.
Ce corollaire implique que deux polynômes de degré n égaux pour $n+1$ valeurs distinctes sont égaux. C'est une généralisation du fait qu'une droite (polynôme de degré 1) est déterminée de manière unique à l'aide de deux points.

Définition 3.3 *On dit que deux polynômes sont premiers entre eux si et seulement si leurs seuls diviseurs communs sont les constantes non nulles.*

Cette définition implique, entre autres, que deux polynômes premiers n'ont aucune racine en commun.
On admettra le théorème suivant qui concerne la factorisation des polynômes :

Théorème 3.5 *Soit un polynôme à coefficients réels de degré n :*

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \text{ avec } a_i \in \mathbb{R}$$

$P(x)$ peut s'écrire de manière unique sous la forme :

$$P(x) = a_n(x-x_1)^{h_1}(x-x_2)^{h_2}\cdots(x-x_l)^{h_l}(x^2+p_1x+q_1)^{k_1}(x^2+p_2x+q_2)^{k_2}\cdots(x^2+p_mx+q_m)^{k_m}$$

où $x_1, x_2, \ldots, x_l$ sont les racines réelles de $P(x)$, deux à deux distinctes , de multiplicité, $h_1, h_2, \ldots, h_l$, et où les trinômes de type $(x^2+px+q)^k$, deux à deux distincts, ont deux racines complexes conjuguées, de multiplicité k.
On a $h_1 + h_2 + \cdots + h_l + 2(k_1 + k_2 + \cdots + k_m) = n$.

Ce théorème signifie que tout polynôme à coefficients réels se factorise en un produit de facteurs du premier degré et de trinômes du second degré à discriminant négatif.

5 Fractions rationnelles

Les fractions rationnelles sont aux polynômes ce que les fractions sont aux entiers : un quotient.

Définition 3.4 *La fonction $f(x)$ est une fraction rationnelle si il existe deux polynômes $P(x)$ et $Q(x)$ premiers entre eux tels que :*

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Comme pour toute fraction, le haut (le polynôme $P(x)$) s'appelle le numérateur et le bas (le polynôme $Q(x)$) le dénominateur.
Le degré d'une fraction rationnelle est égal à la différence du degré du numérateur et de celui du dénominateur.

Exemples :

- la fonction f définie pour tout x par :
$$f(x) = \frac{2x^2 - 4x + 5}{x + 3}$$
Le degré de la fraction rationnelle $f(x)$ est égal à 2 - 1 = 1.
- La fonction g définie pour tout x par :
$$g(x) = \frac{2x^2 - 4x + 5}{x^2 + 1}$$
Le degré de la fraction rationnelle $g(x)$ est égal à 2 - 2 = 0.
- La fonction h définie pour tout x par :
$$h(x) = \frac{2x}{x + 3} - \frac{4}{x - 1}$$
On note que la somme de deux fractions rationnelles donne une autre fraction rationnelle. En effet :
$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{2x}{x + 3} - \frac{4}{x - 1} \\ &= \frac{2x(x - 1)}{(x + 3)(x - 1)} - \frac{4(x + 3)}{(x - 1)(x + 3)} \\ &= \frac{2x^2 + 2x + 12}{(x + 3)(x - 1)} \end{aligned}$$
Le degré de h est égal à 0.

De la même façon que tous les entiers sont des fractions, tous les polynômes sont des fractions rationnelles.
A l'instar de ce qui se fait pour les fractions, les fractions rationnelles peuvent être additionnées, multipliées et même divisées. A chaque fois, le résultat est une autre fraction rationnelle.
Rappelons qu'on ne peut pas toujours diviser un polynôme par un autre. (Une particularité que l'on retrouve aussi chez les entiers !)

Théorème 3.6 *Soit une fraction rationnelle $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ où le degré m de $P(x)$ est supérieur ou égal au degré n de $Q(x)$.*
Alors, pour tout x tel que $Q(x) \neq 0$, on peut écrire :
$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = E(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

- *où $E(x)$ est un polynôme de degré $m - n$, dit partie entière de $f(x)$, et qui est le quotient de la division de $P(x)$ par $Q(x)$;*
- *où $R(x)$ est un polynôme de degré strictement inférieur au degré de $Q(x)$, et qui est le reste de la division de $P(x)$ par $Q(x)$;*
- *et où $\frac{R(x)}{Q(x)}$ est une fraction rationnelle*

Ce théorème est l'équivalent, pour les fractions rationnelles du théorème 3.2

Exemples :

1. Soit la fraction rationnelle $f(x) = \frac{x^4+3x+2}{(x-1)^2}$. En notant que 1 n'est pas racine du numérateur, on déduit que les polynômes sont premiers entre eux. Pour $x \neq 1$, on a :
$$
\begin{array}{r|l}
5x^4 \qquad\qquad\qquad +3x+2 & x^2-2x+1 \\ \cline{2-2}
-5x^4+10x^3-5x^2 \qquad\qquad & 5x^2+10x+15 \\ \hline
10x^3-5x^2 \quad +3x+2 & \\
-10x^3+20x^2-10x & \\ \hline
15x^2-7x \quad +2 & \\
-15x^2+30x-15 & \\ \hline
23x-13 &
\end{array}
$$
et donc :
$$f(x) = 5x^2+10x+15+\frac{23x-13}{(x-1)^2}$$

2. Soit la fraction rationnelle $f(x) = \frac{5x(x^2+1)}{3x^2+2x+3}$. Le dénominateur n'ayant pas de racine réelle, les polynômes sont premiers entre eux. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$
\begin{array}{r|l}
x^3 \qquad\quad +x & 3x^2+2x+3 \\ \cline{2-2}
-x^3-\frac{2}{3}x^2-x & \frac{1}{3}x-\frac{2}{9} \\ \hline
-\frac{2}{3}x^2 \qquad\qquad & \\
\frac{2}{3}x^2+\frac{4}{9}x+\frac{2}{3} & \\ \hline
\frac{4}{9}x+\frac{2}{3} &
\end{array}
$$
et donc :
$$f(x) = \frac{1}{3}x-\frac{2}{9}+\frac{\frac{4}{9}x+\frac{2}{3}}{3x^2+2x+3}$$

Théorème 3.7 *Soit une fraction rationnelle, $g(x) = \frac{R(x)}{Q(x)}$, où le degré de $R(x)$ est strictement inférieur au degré de $Q(x)$. En utilisant le théorème 3.5 on peut écrire :*
$$Q(x) = \lambda(x-x_1)^{h_1}(x-x_2)^{h_2}\cdots(x-x_l)^{h_l}(x^2+p_1x+q_1)^{k_1}(x^2+p_2x+q_2)^{k_2}\cdots(x^2+p_mx+q_m)^{k_m}$$
Alors pour tout $x \notin \{x_1, x_2, \dots, x_l\}$, la fraction rationnelle s'écrit de manière unique sous la forme :
$$
\begin{aligned}
g(x) &= \frac{R(x)}{Q(x)} \\
&= \frac{A_1}{(x-x_1)^{h_1}}+\frac{A_2}{(x-x_1)^{h_1-1}}+\frac{A_3}{(x-x_1)^{h_1-2}}+\cdots+\frac{A_{h_1}}{(x-x_1)} \\
&\quad +\frac{B_1}{(x-x_2)^{h_2}}+\frac{B_2}{(x-x_2)^{h_2-1}}+\frac{B_3}{(x-x_2)^{h_2-2}}+\cdots+\frac{B_{h_2}}{(x-x_2)} \\
&\quad +\cdots \\
&\quad +\frac{L_1}{(x-x_l)^{h_l}}+\frac{L_2}{(x-x_l)^{h_l-1}}+\frac{L_3}{(x-x_l)^{h_l-2}}+\cdots+\frac{L_{h_l}}{(x-x_l)} \\
&\quad +\frac{M_1x+M_1'}{(x^2+p_1x+q_1)^{k_1}}+\frac{M_2x+M_2'}{(x^2+p_1x+q_1)^{k_1-1}}+\frac{M_3x+M_3'}{(x^2+p_1x+q_1)^{k_1-2}}+\cdots+\frac{M_{k_1}x+M_{k_1}'}{(x^2+p_1x+q_1)}
\end{aligned}
$$

$$+\frac{N_1x+N_1'}{(x^2+p_2x+q_2)^{k_2}}+\frac{N_2x+N_2'}{(x^2+p_2x+q_2)^{k_2-1}}+\frac{N_3x+N_3'}{(x^2+p_2x+q_2)^{k_2-2}}+\cdots+\frac{N_{k_2}x+N_{k_2}'}{(x^2+p_2x+q_2)}$$
$$+\cdots$$
$$+\frac{T_1x+T_1'}{(x^2+p_mx+q_m)^{k_m}}+\frac{T_2x+T_2'}{(x^2+p_mx+q_m)^{k_m-1}}+\cdots+\frac{T_{k_m}x+T_{k_m}'}{(x^2+p_mx+q_m)}$$

où $A_1,\ldots,A_{h_1}, B_1,\ldots,B_{h_2}, L_1,\ldots,L_{h_l}, M_1,\ldots,M_{k_1}, M_1',\ldots,M_{k_1}', N_1,\ldots,N_{k_2}, N_1',\ldots,N_{k_2}'$, $T_1,\ldots,T_{k_m}, T_1',\ldots,T_{k_m}'$ sont des nombres réels.

Ce théorème, que l'on admettra, permet la décomposition des fractions rationnelles en éléments simples.

Exemples :

1. Soit la fraction rationnelle $f(x)=\frac{5x^4+3x+2}{(x-1)^2}$.On a montré (exemple 1 du théorème 3.6) que cette fraction rationnelle pouvait s'écrire : $f(x)=5x^2+10x+15+\frac{23x-13}{(x-1)^2}$.
Le théorème 3.7 permet d'écrire :
$$\frac{23x-13}{(x-1)^2}=\frac{A}{(x-1)^2}+\frac{B}{(x-1)}$$
La détermination des constantes A et B (unicité de la décomposition) peut se faire, par exemple, en écrivant :
$$\frac{23x-13}{(x-1)^2}=\frac{A}{(x-1)^2}+\frac{B(x-1)}{(x-1)^2}=\frac{Bx+(A-B)}{(x-1)^2}$$
L'égalité doit avoir lieu pour tout $x\neq 1$, ce qui impose :
$B=23$ et $A-B=-13 \Longrightarrow A=10$ et donc :
$$\frac{5x^4+3x+2}{(x-1)^2}=5x^2+10x+15+\frac{10}{(x-1)^2}+\frac{23}{(x-1)}\qquad \forall x\neq 1$$

2. Soit la fraction rationnelle $f(x)=\frac{1}{x^2(x-1)(x^2+1)^2}$. Les polynômes sont évidemment premiers entre eux et le degré du numérateur est strictement inférieur au degré du dénominateur (degré 7), la partie entière est nulle et pour tout x différent de 0 ou 1, on a :
$$\frac{1}{x^2(x-1)(x^2+1)^2}=\frac{A}{x^2}+\frac{B}{x}+\frac{C}{(x-1)}+\frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}+\frac{Fx+G}{x^2+1}$$
En multipliant les deux membres de l'égalité par x^2 et en faisant tendre x vers zéro, on obtient $A=-1$.
En multipliant ensuite par $x-1$ et en faisant tendre x vers 1 on obtient $C=\frac{1}{4}$.
En réduisant au même dénominateur et en additionnant les fractions du membre de droite, on obtient :

$$1=A(x-1)(x^2+1)^2+Bx(x-1)(x^2+1)^2+Cx^2(x^2+1)^2+(Dx+E)x^2(x-1)+(Fx+G)x^2(x-1)(x^2+1)$$

L'égalité des numérateurs pour tout x différent de zéro et de un implique successivement : $B = -1$, $F = \frac{3}{4} = G$, $D = \frac{1}{2} = E$. Finalement :

$$f(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{4}\,\frac{1}{(x-1)} + \frac{1}{2}\,\frac{x+1}{(x^2+1)^2} + \frac{3}{4}\,\frac{x+1}{x^2+1} \qquad \forall x \notin \{0,1\}$$

6 Exercices

1. **Vrai ou Faux ?**
   (a) les fonctions suivantes sont des polynômes :
      i. $\sqrt{x}$
      ii. x^4
      iii. e^x
      iv. $x^a \; a \in \mathbb{Z}$
   (b) les seuls polynômes inversibles sont les constantes non nulles.
   (c) le produit de deux fractions rationnelles est une fraction rationnelle.
   (d) la somme de deux polynômes de degré m est un polynôme de degré m.
2. Calculer la division de $P(x)$ par $Q(x)$ pour les cas suivants :
   (a) $P(x) = x^4 + x^3 - 16x^2 + 11x + 16$, $Q(x) = x^3 - 17x + 25$;
   (b) $P(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 1$, $Q(x) = x^3 + x^2 - x - 1$;
   (c) $P(x) = x^4 + 7x^3 + 19x^2 + 23x + 10$, $Q(x) = x^4 + 7x^3 + 18x^2 + 22x + 12$
3. Trouvez les racines de $P(x)$ (attention il peut y avoir des racines multiples) :
   (a) $P(x) = x^6 - 6x^4 - 4x^3 + 9x^2 + 12x + 4$
   (b) $P(x) = x^5 - 10x^3 - 20x^2 - 15x - 4$
4. Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles suivantes :

$$\begin{aligned}
F_1(x) &= \frac{(x^2+2)}{x^4+1} \\
F_2(x) &= \frac{x^3+2x^3}{(x^2+x+1)(x^2+1)} \\
F_3(x) &= = \frac{1}{(x-3)^2(x^2+4)} \\
F_4(x) &= \frac{x+2}{x^2(x^2-1)(x^2+1)^2} \\
F_5(x) &= \frac{2x^5+3x^2-1}{(x^2+x+1)^3} \\
F_6(x) &= \frac{(3x^7-5x^4+4x^2-11x+1}{(x^2+x+1)^{1994}} \\
F_7(x) &= \frac{x}{(x+1)(x^2+1)^3}
\end{aligned}$$

5. Soit n un entier naturel non nul. Trouver la dérivée n-ième des fractions rationnelles suivantes :

$$F_1(x) = \frac{x^2}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

$$\begin{aligned} F_2(x) &= \frac{x^3}{(x-1)(x-3)} \\ F_3(x) &= \frac{4x^4}{(x-1)^2(x+2)} \end{aligned}$$

Chapitre 4

Formule de Taylor-Développements limités

1 La formule de Taylor

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction, (dérivable autant de fois que nécessaire) sur l'intervalle I, a un point de I et m un entier. La formule de Taylor à l'ordre m permet d'approcher $f(x)$, pour x voisin de a, par une expression ne dépendant que de $f(a), f'(a), \ldots, f^{(m)}(a)$ et de x (et donc pas de $f(x)$).

1.1 Cas $m = 0$

On approche $f(x)$ par $f(a)$; l'erreur $e_0(x) = f(x) - f(a)$ peut être évaluée à l'aide de la formule des accroissements finis :
il existe θ entre a et x tel que $f(x) = f(a) + (x - a)f'(\theta)$ et

$$|e_0(x)| = |f(x) - f(a)| \leq M_1|x - a|$$

si M_1 est un nombre positif majorant $|f'(t)|$ lorsque t parcourt I.
On retiendra que l'erreur est (au plus) de l'ordre de $|x - a|$. On dit que $e_0(x)$ est, lorsque x tend vers a, un infiniment petit d'ordre (supérieur ou égal à) 1.

1.2 Cas $m = 1$

On approche $f(x)$ par la fonction affine : $g(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$.
D'un point de vue graphique, on passe de f à g en remplaçant la courbe $y = f(x)$ par la tangente à cette courbe au point $(a, f(a))$; intuitivement, cette tangente est la droite qui "colle" le plus à la courbe $y = f(x)$ au voisinage de $(a, f(a))$. L'erreur peut être évaluée à l'aide de la formule de Taylor :

Théorème 4.1 (Formule de Taylor à l'ordre 1) *Soit $b \in I$; il existe un réel θ compris entre a et b tel que :*

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b - a) + \frac{1}{2}f''(\theta)(b - a)^2$$

Démonstration : considérons la fonction

$$\phi(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) - c(x-a)^2$$

La constante c étant choisie telle que $\phi(b) = 0$. ($c = \frac{f(b)-f(a)-f'(a)(b-a)}{(b-a)^2}$, $b \neq a$). Comme $\phi(b) = \phi(a) = 0$, il existe d'après le théorème des accroissements finis (voir théorème 2.3) un nombre θ_1 entre a et b tel que :

$$\phi'(\theta_1) = 0$$

c'est-à-dire :

$$f'(\theta_1) - f'(a) - 2c(\theta_1 - a) = 0$$

et

$$c = \frac{1}{2}\frac{f'(\theta_1) - f'(a)}{\theta_1 - a}$$

En appliquant une nouvelle fois le théorème des accroissements finis, on obtient qu'il existe un réel θ entre a et θ_1 tel que

$$c = \frac{1}{2}f''(\theta)$$

.
Puisque $\phi(b) = 0$, on a :

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{1}{2}f''(\theta)(b-a)^2$$

En regardant l'approximation de $f(x)$ par $f(a) + f'(a)(x-a)$, on voit que l'erreur $e_1(x) = f(x) - f(a) - f'(x-a)$ peut s'écrire :

$$e_1(x) = \frac{1}{2}f''(\theta)(x-a)^2$$

Donc si M_2 est un nombre positif majorant $|f''(t)|$, pour tout $t \in I$, on a :

$$|e_1(x)| \leq \frac{1}{2}M_2|x-a|^2$$

L'erreur est, au plus de l'ordre de $|x-a|^2$ lorsque $x \to a$. On dit que, pour $x \to a$, $e_1(x)$ est un infiniment petit d'ordre (supérieur ou égal à 2) ; on notera que, pour $x \to a$, $\frac{M_2}{2}|x-a|^2$ est infiniment plus petit que $M_1|x-a|$.

Exemple 1 : supposons f convexe sur I ; alors $f''(x) \geq 0$ sur I. Par conséquent pour chaque $a, b \in I$:

$$f(b) \geq f(a) + f'(a)(b-a)$$

(puisque $f''(\theta) \geq 0$). La courbe $y = f(x)$ est donc au dessus de la tangente au point $(a, f(a))$. Ce résultat a déjà été obtenu à la section 3.1.

Exemple 2 : déterminons la limite pour $x \to 0$ de $\frac{1-cos(2x)}{3x^2}$ (forme $\frac{0}{0}$).
Appliquons la formule de Taylor à $f(x) = 1 - \cos(2x)$ au point $a = 0$.
On a $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$ et $f''(x) = 4\cos(2x)$. D'où :

$$\frac{1 - cos(2x)}{3x^2} = \frac{\frac{1}{2}f''(\theta)x^2}{3x^2} = \frac{2}{3}f''(\theta)$$

θ étant un réel situé entre 0 et x, $\theta \to 0$ quand $x \to 0$ et $\lim_{x\to 0} f''(\theta) = 1$. Par conséquent :

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - cos(2x)}{3x^2} = \frac{2}{3}$$

2 Cas général

On approche $f(x)$ par $g(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2} + \cdots + f^{(m)}(a)\frac{(x-a)^m}{m!}$.
Remarquons que $g(x)$ est un polynôme de degré m et que :

$$g(a) = f(a), g'(a) = f'(a), \ \ldots, g^{(k)}(a) = f^{(k)}(a), \ \ldots, g^{(m)}(a) = f^{(m)}(a)$$

On peut montrer que $g(x)$ est le seul polynôme de degré m, admettant au point a les mêmes dérivées successives, d'ordre inférieur ou égal à m, que f. En ce sens, $g(x)$ est parmi les polynômes de degré inférieur ou égal à m, celui qui "colle" le plus à $f(x)$ lorsque $x \to a$.
L'erreur $e_m(x) = f(x) - g(x)$ peut être évaluée à l'aide de la formule de Taylor d'ordre m :

Théorème 4.2 (Formule de Taylor) *Si f est $m+1$ fois dérivable sur I, et si a et x sont deux points de I, il existe un réel θ compris entre a et x tel que :*

$$f(x) = f(a)+f'(a)(x-a)+f''(a)\frac{(x-a)^2}{2}+\cdots+f^{(m)}(a)\frac{(x-a)^m}{m!}+f^{(m+1)}(\theta)\frac{(x-a)^{m+1}}{(m+1)!}$$

En particulier , si $|f(t)^{(m+1)}| \leq M$ au voisinage de a, l'erreur $e_m(x)$ est de module inférieur à $M \times \frac{|x-a|^{m+1}}{(m+1)!}$. C'est un infiniment petit d'ordre (supérieur ou égal) à $m+1$.

Exemples :

1. Prenons $f(x) = e^x$, $I = \mathbb{R}$, $a = 0$. On obtient, si n est un entier positif :

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + e^\theta \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

où θ est compris entre 0 et x.
Si $x \geq 0$, $e^\theta \geq 1$; on en déduit que pour tout $x \geq 0$, et tout entier $n \geq 0$, on a :

$$e^x \geq 1 + \frac{x}{1!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \geq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

En particulier, comme $\frac{e^x}{x^n} \geq \frac{x}{(n+1)!}$:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \tag{4.1}$$

On peut plus généralement énoncer :

(a) $\lim_{u\to+\infty} \frac{e^{\alpha u}}{u^\beta} = +\infty$ pour $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ (en posant $x = \alpha u$ on se ramène à la formule 4.1)

(b) $\lim_{v\to+\infty} v^\beta e^{-\alpha v} = 0$ si $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$

Dans tous les cas ”l’exponentielle l’emporte sur la puissance”.

2. Prenons $f(x) = \sin(x)$, $a = 0$. Pour $x > 0$, il existe θ_1 et θ_2 compris entre 0 et x tels que :

$$\begin{aligned} & f(x) = x - \frac{x^3}{6}\cos(\theta_1) \geq x - \frac{x^3}{6} \\ \text{et} \qquad & f(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}\sin(\theta_2) \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} \end{aligned}$$

On obtient ainsi un encadrement de $\sin(x)$, à l’aide de polynômes.

On remarque aussi que la fonction sinus étant impaire, la partie régulière de son développement ne contient que des exposants impairs de x.

3. La formule de Taylor est applicable aux polynômes de degré n. Ils sont infiniment dérivables et la dérivée d’ordre $n + 1$ est identiquement nulle. On peut remarquer que :

$$\begin{aligned} f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n &\implies f(0) = a_0 \\ f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + na_nx^{n-1} &\implies f'(0) = a_1 \\ f''(x) = 2 \times 1 \times a_2 + 3 \times 2a_3x \cdots + n(n-1)a_nx^{n-2} &\implies f''(0) = 2!a_2 \\ f^{(3)}(x) = 3 \times 2 \times 1 \times a_3 + \cdots + n(n-1)(n-2)a_nx^{n-3} &\implies f^{(3)}(0) = 3!a_3 \\ \text{etc.} & \end{aligned}$$

on a donc bien :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

3 Développements limités : définition, premières propriétés

Définition 4.1 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle contenant 0 et $I \neq \{0\}$. Soit n un entier positif. Déterminer un développement limité de f, à l’ordre n, au voisinage de 0 (ou en 0), c’est trouver des coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_n$ tels que l’on ait :*

$$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + x^n\epsilon(x)$$

avec

$$\lim_{x\to 0} \epsilon(x) = 0$$

En d'autres termes : $|f(x) - (a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n)|$ *est un infiniment petit d'ordre strictement plus grand que* n *; c'est une quantité infiniment plus petite que* $|x|^n$*.*

Commençons par formuler deux propriétés élémentaires :

3.1 Unicité du développement limité

Théorème 4.3 *Une fonction* f *admet au plus un développement limité à l'ordre* n *en 0.*

Autrement dit, les coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont déterminés par f. Supposons en effet que l'on ait, pour $x \in I$:

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + x^n \epsilon_1(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n + x^n \epsilon_2(x)$$

pour deux systèmes de coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_n, b_0, \ldots, b_n$ et deux coefficients ϵ_1 et ϵ_2 tendant vers 0 en 0.
En faisant tendre x vers zéro dans chaque membre, on obtient à la limite : $a_0 = b_0$. En divisant ensuite par x, on obtient, puisque $a_0 = b_0$:

$$a_1 + a_2 x + \cdots + a_n x^{n-1} + x^{n-1}\epsilon_1(x) = b_1 + b_2 x + \cdots + b_n x^{n-1} + x^{n-1}\epsilon_2(x)$$

En faisant tendre à nouveau x vers zéro, on obtient (si $n \geq 1$) $a_1 = b_1$. On peut alors de nouveau diviser par x pour obtenir (si $n \geq 2$) $a_2 = b_2$. On montre ainsi de proche en proche que : $a_0 = b_0, a_1 = b_1, \ldots, a_n = b_n$.

3.2 Troncature d'un développement limité

Si on a un développement limité de f à l'ordre n (en 0), on obtient le développement limité de f à l'ordre p, $p \in \mathbb{N}$, $p < n$ par "troncature" (*i.e.* en conservant les termes d'ordre inférieur ou égal à p) :
si : $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + x^n \epsilon(x)$ pour $x \in I$ avec $\lim_{x\to 0} \epsilon(x) = 0$
alors : $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_p x^p (a_{p+1} x + a_{p+2} x^2 + \cdots + a_n x^{n-p} + x^{n-p}\epsilon(x))$
c'est-à-dire :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_p x^p + x^p \epsilon_1(x) \qquad \text{avec } \lim_{x\to 0} \epsilon_1(x) = 0$$

On voit donc que si f admet un DL à l'ordre n en 0, le polynôme $P_f^n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ tel que $|f(x) - P_f^n(x)|$ soit un infiniment petit d'ordre strictement plus grand que n est uniquement déterminé. On dira que ce polynôme est le développement limité de f, à l'ordre n, au voisinage de 0.
Pour une fonction f assez régulière, la formule de Taylor (voir théorème 4.2) donne (au moins théoriquement) ce développement :

Théorème 4.4 *Si f est n fois dérivable sur I, $0 \in I$ et $I \neq \{0\}$ et si $f^{(n)}$ est continue, on a :*

$$f(x) = f(0) + f'(0)\frac{x}{1!} + \cdots + f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} + x^n \epsilon(x)$$

où la fonction $\epsilon(x)$ tend vers 0 quand $x \to 0$.

Démonstration : d'après la formule de Taylor, on a pour un certain θ compris entre 0 et x :

$$f(x) = f(0) + f'(0)\frac{x}{1!} + \cdots + f^{(n-1)}(0)\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + f^{(n)}(\theta)\frac{x^n}{n!}$$

et

$$f(x) = f(0) + f'(0)\frac{x}{1!} + \cdots + f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} + x^n \epsilon(x)$$

donc :

$$\epsilon(x) = \frac{1}{n!}(f^{(n)}(\theta) - f^{(n)}(0))$$

En utilisant la continuité de $f^{(n)}$ en 0 on a $\lim_{x\to 0} \epsilon(x) = 0$.

Le théorème permet d'écrire le DL des fonctions suffisamment "simples" à n'importe quel ordre. Par exemple :
- $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + x^n \epsilon_1(x)$
- $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n}\epsilon_2(x)$
- $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+1}\epsilon_3(x)$

(n entier quelconque et $\lim_{x\to 0} \epsilon_j(x) = 0$).
On peut développer de même $(1+x)^\alpha$, $(\alpha \in \mathbb{R})$; le DL à l'ordre 3 est :

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}x^3 + x^3\epsilon(x)$$

avec $\lim_{x\to 0} \epsilon(x) = 0$.
Le cas $\alpha = -1$ est particulièrement important, et se déduit (sans passer par la formule de Taylor) de la formule de la progression géométrique : $1 + x + \cdots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + x^n\epsilon_1(x) \\
\frac{1}{1+x} &= 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + x^n\epsilon_2(x)
\end{aligned}$$

avec $\lim_{x\to 0} \epsilon_j(x) = 0$.

4 Opérations sur les développements limités

4.1 Somme

Le DL à l'ordre n de $f(x) + g(x)$, (au voisinage de 0) s'obtient en ajoutant terme à terme les DL à l'ordre n de $f(x)$ et $g(x)$:

si $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + x^n \epsilon_1(x)$ et $g(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n + x^n \epsilon_2(x)$ avec $\lim_{x\to 0} \epsilon_j(x) = 0$, on obtient en ajoutant :

$$f(x) + g(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \cdots + (a_n + b_n)x^n + x^n \epsilon_3(x)$$

où $\epsilon_3(x) = \epsilon_1(x) + \epsilon_2(x)$ et donc $\lim_{x\to 0} \epsilon_3(x) = 0$.

4.2 *Produit*

Distinguons d'abord deux cas élémentaires :

$xf(x)$: si on a un DL à l'ordre n de $f(x)$ en 0, on a immédiatement un DL à l'ordre $n+1$ de $xf(x)$; il suffit d'écrire, si $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + x^n \epsilon_1(x)$ (et $\lim_{x\to 0} \epsilon_1(x) = 0$), que :

$$xf(x) = a_0 x + a_1 x^2 + \cdots + a_n x^{n+1} + x^{n+1} \epsilon_1(x)$$

On obtient de même un développement limité à l'ordre $n+2$ de $x^2 f(x)$.

$\frac{f(x)}{x}$: on suppose $f(0) = 0$, $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + x^n \epsilon_1(x)$ (et $\lim_{x\to 0} \epsilon_1(x) = 0$) avec $n \geq 1$. On peut donc prolonger par continuité la fonction $\frac{f(x)}{x}$ en $x = 0$ (avec la valeur a_1). On obtient un DL à l'ordre $(n-1)$ de $\frac{f(x)}{x}$ en écrivant :

$$\frac{f(x)}{x} = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \cdots + a_n x^{n-1} + x^{n-1} \epsilon(x)$$

Exemple : $\frac{\sin(x)}{x}$ à l'ordre 5 :

$$\frac{\sin(x)}{x} = \frac{1}{x}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{120} + x^6 \epsilon(x)\right) = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + x^5 \epsilon(x)$$

Cas général

Supposons $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + x^n \epsilon_1(x)$ et $g(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n + x^n \epsilon_2(x)$ avec $\lim_{x\to 0} \epsilon_j(x) = 0$, on obtient un DL à l'ordre n de $f(x)g(x)$ en développant le produit :

$$(a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + x^n \epsilon_1(x))(b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n + x^n \epsilon_2(x))$$

en regroupant les termes de même degré, et en ne conservant que ceux de degré inférieur ou égal à n (et où n'apparaît ni ϵ_1 ni ϵ_2). Tous les autres termes sont des infiniment petits d'ordre strictement supérieur à n.

Exemple : DL à l'ordre 3 de $\frac{e^x}{1-x}$ (pour $x \to 0$) :

$$
\begin{aligned}
\frac{e^x}{1-x} &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3\epsilon_1(x)\right)\left(1 + x + x^2 + x^3 + x^3\epsilon_2(x)\right) \\
&= 1 + 2x + x^2\left(\frac{1}{2} + 1 + 1\right) + x^3\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2} + 1 + 1\right) + x^3\epsilon(x) \\
&= 1 + 2x + \frac{5}{2}x^2 + \frac{8}{3}x^3 + x^3\epsilon(x)
\end{aligned}
$$

$\lim_{x\to 0}\epsilon(x) = 0$.

4.3 *Composition*

Cas particulier : $f(x^2)$

Si $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + x^n\epsilon_1(x)$ avec $\lim_{x\to 0}\epsilon_1(x) = 0$, on a immédiatement :

$$f(x^2) = a_0 + a_1 x^2 + \cdots + a_n x^{2n} + x^{2n}\epsilon(x)$$

avec $\epsilon(x) = \epsilon_1(x^2)$ et donc un DL à l'ordre $2n$ de $f(x^2)$ (pour $x \to 0$). On traiterait de même les fonctions $f(x^3), \ldots, f(x^k)$ (k entier ≥ 2), ou $f(-x^2), \ldots, f(-x^k)$.

Exemples :

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{1-x^2} &= 1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n} + x^{2n}\epsilon_1(x) \\
\frac{1}{1+x^2} &= 1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-1)^n x^{2n} + x^{2n}\epsilon_2(x)
\end{aligned}
$$

avec $\lim_{x\to 0}\epsilon_j(x) = 0$. (Ces développements se déduisent de $\frac{1}{1-x}$ et $\frac{1}{1+x}$).
De même

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{3}{4}x^4 + x^4\epsilon(x)$$

$\lim_{x\to 0}\epsilon(x) = 0$. (puisque $(1+u)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}u + \frac{3}{4}u^2 + u^2\epsilon(u)$)

Cas général : $f(g(x))$

on suppose que pour un entier n positif donné : $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + x^n\epsilon_1(x)$ et $g(x) = b_1 x + \cdots + b_n x^n + x^n\epsilon_2(x)$ avec $\lim_{x\to 0}\epsilon_j(x) = 0$.
On remarque que par hypothèse $g(0) = 0$ et même $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$.
D'où :

$$
\begin{aligned}
f(g(x)) &= a_0 + a_1\left(b_1 x + \cdots + b_n x^n + x^n\epsilon_2(x)\right) + \cdots \\
&\quad + a_n\left(b_1 x + \cdots + b_n x^n + x^n\epsilon_2(x)\right)^n + g(x)^n\epsilon_1(g(x)) \qquad (4.2)
\end{aligned}
$$

Comme $g(x)^n\epsilon_1(g(x)) = x^n\left(b_1 x + \cdots + b_n x^n + x^n\epsilon_2(x)\right)^n\epsilon_1(g(x)) = x^n\epsilon_3(x)$, on voit que $g(x)^n\epsilon_1(g(x))$ est un infiniment petit d'ordre supérieur ou égal à n.

On en déduit le DL limité à l'ordre n de $f(g(x))$ (pour $x \to 0$) en remplaçant dans l'équation 4.2 chaque terme $a_k\left(b_1x+\cdots+b_nx^n+x^n\epsilon_2(x)\right)^k$ par son développement en omettant les termes de degré supérieur à n (par rapport à x) et ceux où apparaît $\epsilon_2(x)$. Les termes omis sont en effet des infiniment petits d'ordre supérieur ou égal à n.

Exemple : DL d'ordre 5 au voisinage de 0 de la fonction $f(x) = e^{\sin(x)}$

$$\begin{aligned} \sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{120} + x^6\epsilon_1(x) \\ e^y &= 1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6} + y^3\epsilon_2(y) \end{aligned}$$

$\lim_{x\to 0}\epsilon_j(x) = 0$.
On a :

$$\begin{aligned} \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{120}\right)^2 &= x^2\left(1 - \frac{x^2}{6}\right)^2 + x^5\epsilon_3(x) \\ &= x^2\left(1 - \frac{x^2}{3}\right) + x^5\epsilon_4(x) \end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned} \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{120}\right)^3 &= x^3\left(1 - \frac{x^2}{6}\right)^3 + x^5\epsilon_5(x) \\ &= x^3\left(1 - \frac{x^2}{2}\right) + x^5\epsilon_6(x) \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{120}\right)^4 &= x^4 + x^5\epsilon_7(x) \\ \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{120}\right)^5 &= x^5 + x^5\epsilon_8(x) \end{aligned}$$

Et donc en substituant $\sin(x)$ dans le DL de e^y et en ne conservant que les monômes de degré inférieur à 5 on obtient :

$$e^{\sin(x)} = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} - \frac{x^5}{15} + x^5\epsilon(x)$$

$\lim_{x\to 0}\epsilon(x) = 0$.

4.4 Primitive d'un développement limité

Définition 4.2 *Supposons f dérivable sur I, $(0 \in I$ et $I \neq \{0\})$ et pour n entier positif fixé, supposons :*

$$f'(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + x^n \epsilon(x)$$

$\lim_{x\to 0} \epsilon(x) = 0$.
Alors f admet le DL à l'ordre $n+1$ suivant :

$$f(x) = f(0) + a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + \cdots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + x^{n+1}\epsilon_1(x)$$

$\lim_{x\to 0} \epsilon_1(x) = 0$.

En d'autres termes, on remplace $a_k x^k$ par $a_k \frac{x^{k+1}}{k+1}$ pour $k = 0, \ldots, n$ et on ajoute le terme (d'ordre 0) $f(0)$. Si f est $(n+1)$ dérivable et telle que $f^{(n+1)}$ soit continue en 0, la règle se vérifie facilement en comparant les développements de Taylor de f et f'.

Exemples : pour tout entier n positif :

1. Comme $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + x^{2n}\epsilon_1(x)$ avec $\lim_{x\to 0} \epsilon_1(x) = 0$ on a :
$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + x^{2n+1}\epsilon_2(x)$$
avec $\lim_{x\to 0} \epsilon_2(x) = 0$
2. Comme $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + x^n \epsilon_3(x)$ avec $\lim_{x\to 0} \epsilon_3(x) = 0$ on a :
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + x^{n+1}\epsilon_4(x)$$
avec $\lim_{x\to 0} \epsilon_4(x) = 0$

5 Exemples d'utilisation des développements limités

5.1 Formes indéterminées $\frac{0}{0}$

Soient f et g deux fonctions sur l'intervalle I, supposons que $0 \in I$ $(I \neq \{0\})$ et $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} g(x) = 0$ et cherchons la limite éventuelle de $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$. Imaginons qu'on sache calculer le DL de $f(x)$ pour $x \to 0$, à un ordre faisant apparaître un terme non nul, et de même pour $g(x)$:

$$\begin{cases} f(x) = a_n x^n + x^n \epsilon_1(x) \\ g(x) = b_p x^p + x^p \epsilon_2(x) \end{cases} \quad \text{avec } \lim_{x\to 0} \epsilon_1(x) = \lim_{x\to 0} \epsilon_2(x) = 0$$

$a_n \neq 0$, $b_p \neq 0$ et n, p entiers positifs. On en déduit :

$$\frac{f(x)}{g(x)} = x^{n-p} \frac{a_n + \epsilon_1(x)}{b_p + \epsilon_2(x)}$$

D'où le résultat :

- si $n > p$, $f/_g$ tend vers 0 (pour $x \to 0$) ;
- si $n = p$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ tend vers $\frac{a_n}{b_p}$ lorsque $x \to 0$;
- si $n < p$, $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f(x)}{g(x)}$ tend vers $\pm\infty$ selon le signe de $\frac{a_n}{b_p}$.

Exemple : $\lim_{x\to 0} \frac{\arctan(x)-x}{\sin(x)-x\cos(x)}$;
On a $\arctan(x) - x = -\frac{x^3}{3} + x^3\epsilon_1(x)$, et $\sin(x) - x\cos(x) = \left(x - \frac{x^3}{6}\right) - x\left(1 - \frac{x^2}{2}\right) + x^3\epsilon_2(x) = \frac{x^3}{3} + x^3\epsilon_3(x)$.
On en déduit : $\frac{\arctan(x)-x}{\sin(x)-x\cos(x)} \to -1$ lorsque $x \to 0$.

Étude pour $x \to a$
On étudie une forme indéterminée $\frac{f(x)}{g(x)}$ pour $x \to a$ (on suppose que $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$). On se ramènera toujours au cas $a = 0$ en posant $x = a + u$, et en étudiant pour $u \to 0$ la quantité $\frac{f(a+u)}{g(a+u)}$

Étude pour $x \to +\infty$
On cherche $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$; on se ramènera encore à une étude au voisinage de 0, en posant $x = \frac{1}{u}$, et en étudiant $\frac{f\left(\frac{1}{u}\right)}{g\left(\frac{1}{u}\right)}$ pour $u \to 0$, $u > 0$.

Exemple : calculons, si elle existe, $\lim_{x\to+\infty} \left\{ x\frac{(1+x^2)^{1/6}-x^{1/3}}{(1+x)^{1/3}-x^{1/3}} \right\}$.
En utilisant la formule : $(1 + u)^\alpha = 1 + \alpha u + u\epsilon(u)$ avec $\lim_{u\to 0} \epsilon(u) = 0$, on a :

$$(1+x^2)^{1/6}-x^{1/3} = x^{1/3}\left(\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{1/6} - 1\right) = x^{1/3}\left(1 + \frac{1}{6x^2} + \frac{1}{x^2}\epsilon_1(x) - 1\right) = x^{1/3}\left(\frac{1}{6x^2} + \frac{1}{x^2}\epsilon_1(x)\right)$$

De même :

$$(1+x)^{1/3}-x^{1/3} = x^{1/3}\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^{1/3} - 1\right) = x^{1/3}\left(1 + \frac{1}{3x} + \frac{1}{x}\epsilon_2(x) - 1\right) = x^{1/3}\left(\frac{1}{3x} + \frac{1}{x}\epsilon_2(x)\right)$$

où $\lim_{x\to+\infty} \epsilon_1(x) = \lim_{x\to+\infty} \epsilon_2(x) = 0$. On en déduit :

$$x\frac{(1+x^2)^{1/6} - x^{1/3}}{(1+x)^{1/3} - x^{1/3}} = x\frac{x^{1/3}\left(\frac{1}{6x^2} + \frac{1}{x^2}\epsilon_1(x)\right)}{x^{1/3}\left(\frac{1}{3x} + \frac{1}{x}\epsilon_2(x)\right)} = \frac{\frac{1}{6} + \epsilon_1(x)}{\frac{1}{3} + \epsilon_2(x)}$$

ce qui montre que la limite existe et vaut $\frac{1}{2}$.

5.2 *Étude d'une forme indéterminée* 1^∞

On cherche la limite pour $x \to 0$ de $f(x) = (\cos(x))^{\frac{1}{x^2}}$.
On écrit :

$$\cos(x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{1}{x^2}\ln(\cos(x))}$$

et on est ramené à l'étude de $\frac{1}{x^2}\ln(\cos(x))$ pour $x \to 0$. C'est une forme indéterminée $\frac{0}{0}$.
Effectuons un DL à l'ordre 2 de $\ln(\cos(x))$ (pour $x \to 0$). :

$$\begin{cases} \ln(1+u) & = & u + u\epsilon_1(u) \\ u = \cos(x) - 1 & = & -\frac{x^2}{2} + x^2\epsilon_2(x) \end{cases}$$

où $\lim_{x\to+\infty}\epsilon_1(x) = \lim_{x\to+\infty}\epsilon_2(x) = 0$.
En composant les DL, on obtient :

$$\ln(\cos(x)) = \left(-\frac{x^2}{2} + x^2\epsilon_2(x)\right) + x^2\left(-\frac{1}{2} + \epsilon_2(x)\right)\epsilon_1(u) = -\frac{x^2}{2} + x^2\epsilon_3(x)$$

où $\lim_{x\to+\infty}\epsilon_3(x) = 0$.
D'où :

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln(\cos(x)) = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0}(\cos(x))^{\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

6 Étude d'une branche infinie (recherche d'asymptote)

On se propose d'étudier la branche infinie, $x \to +\infty$ de la courbe $y = f(x) = (1 - x^2 + x^3)^{1/3}$

Direction asymptotique :

$$\frac{f(x)}{x} = \left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x} + 1\right)^{1/3} \to 1 \quad \text{pour } x \to +\infty$$

Asymptote : on forme $f(x) - x = x\left(\left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x} + 1\right)^{1/3} - 1\right)$.
Utilisons le DL à l'ordre 1 : $(1+v)^{1/3} = 1 + \frac{v}{3} + v\epsilon_1(v)$ avec $\lim_{v\to 0}\epsilon_1(v) = 0$ pour en déduire :

$$(1 - u + u^3)^{1/3} - 1 = -\frac{u}{3} + u\epsilon_2(u)$$

avec $\lim_{u\to 0}\epsilon_2(u) = 0$
Par conséquent :

$$f(x) - x = x\left(-\frac{1}{3x} + \frac{1}{x}\epsilon_2(x)\right) \to -\frac{1}{3} \quad \text{quand } x \to +\infty$$

$y = f(x)$ admet donc, pour $x \to +\infty$, l'asymptote $y = x - \frac{1}{3}$

Position par rapport à l'asymptote : il s'agit d'étudier le signe, pour x grand, de $f(x) - x + \frac{1}{3}$:

$$f(x) - \left(x - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{u}((1-u+u^3)^{1/3} - 1) + \frac{1}{3} \quad \text{où } u = \frac{1}{x}$$

On effectue un DL à l'ordre 2 de $(1-u+u^3)^{1/3}$. On a :

$$(1+v)^{1/3} = 1 + \frac{v}{3} - \frac{1}{9}v^2 + v^2\epsilon_1'(v) \qquad \lim_{v\to 0}\epsilon_1'(v) = 0$$

et en composant avec $v = -u + u^3$:

$$(1-u+u^3)^{1/3} = 1 - \frac{u}{3} + \frac{1}{9}u^2 + u^2\epsilon_2'(u) \qquad \lim_{u\to 0}\epsilon_2'(u) = 0$$

Par conséquent :

$$\frac{1}{u}((1-u+u^3)^{1/3} - 1) + \frac{1}{3} = -\frac{1}{9}u + u\epsilon_2'(u) = u\left(-\frac{1}{9} + \epsilon_2(u)\right) \qquad \lim_{u\to 0}\epsilon_2'(u) = 0$$

Pour $u > 0$, assez petit $-\frac{1}{9} + \epsilon_2(u) < 0$. Ce qui prouve que $f(x) - \left(x - \frac{1}{3}\right) < 0$, pour x assez grand ($x \to +\infty$) et par conséquent la courbe $y = f(x)$, présente une branche infinie situé *sous* l'asymptote $y = x - \frac{1}{3}$ ($x \to +\infty$).

7 Exercices

1. **Vrai ou Faux ?**
   (a) Toute fonction continue sur un intervalle I admet un développement limité.
   (b) Un développement limité d'ordre n est un polynôme d'ordre $n+1$.
   (c) les coefficients pairs du DL d'une fonction paire sont nuls.
   (d) Toute fonction admettant un développement limité d'ordre supérieur ou égal à 1 possède une asymptote.
   (e) Le logarithme l'emporte toujours sur la puissance.
   (f) La dérivée d'un DL est le DL de la dérivée.
2. Déterminer le DL à l'ordre 4, au voisinage de 0, des fonctions :
   (a) $f_1 : x \mapsto \frac{1-x^2}{1+x^4}$
   (b) $f_2 : x \mapsto \frac{1-x^4}{1-x^2}$
3. Déterminer par deux méthodes, le développement limité d'ordre 3, au voisinage de 0, de la fonction $f : x \mapsto \tan(x)$.
4. Déterminer le DL à l'ordre 3, au voisinage de 0, des fonctions :
   (a) $f_1 : x \mapsto \sqrt{1+x}\sin(x)$
   (b) $f_2 : x \mapsto \frac{\sin(x)}{\sqrt{1+x}}$
   (c) $f_3 : x \mapsto \sqrt{1+x}\cos(x)$
5. Déterminer le DL à l'ordre 8, au voisinage de 0, de $f : x \mapsto \tan(x)$, en remarquant que $f' = 1 + f^2$.
6. Calculer le DL à l'ordre 5, au voisinage de 0, de la fonction f définie par la formule suivante :
$$f(x) = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)^{-cot(2x)} \qquad \text{si } x \neq 0$$
   et prolonger par continuité.
7. Déterminer :
   (a) $\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin(x)}{x^3}$
   (b) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{\tan^2(x)}$
   (c) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{4+x}-\left(2+\frac{x}{4}\right)}{1-\cos(2x)}$
   (d) $\lim_{x\to 0} \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x}+}}} - \sqrt{\frac{1}{x}}$
   (e) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{\arcsin(x)} - e^{\sin(x)}}{e^{\arctan(x)} - e^{\tan(x)}}$
8. Montrer qu'au voisinage de $+\infty$:
$$\sqrt{x + \sqrt{x^2+1}} - \sqrt{x + \sqrt{x^2-1}} \approx \frac{1}{2\sqrt{2}x^{3/2}}$$

9. Déterminer le DL d'ordre p, au voisinage de 0, de la fonction :
$$f : x \mapsto (1+x)^n \text{ , } n \in \mathbb{Q}$$
en déduire la formule du binôme de Newton $(1+x)^n$ où $n \in \mathbb{N}^*$
10. Déterminer :
    (a) $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{2+x}-2}{\sqrt{x+7}-3}$
    (b) $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{2x+5}-3}{x^2-4}$
    (c) $\lim_{x\to \frac{\pi}{3}} \frac{\sin(x)-\sqrt{3}\cos(x)}{2\cos(x)-1}$
    (d) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} (\sin(x))^{\tan(x)}$
    (e) $\lim_{x\to \frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{\arcsin(x)^2-{}^{\pi}/_{16}}{2x^2-1}$
    (f) $\lim_{x\to e} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{e}}{\ln(x)-1}$
11. Déterminer le DL d'ordre 3, au voisinage de 0, de la fonction : $f : x \mapsto \sqrt{1-x-x^2}$
12. Donner une valeur approchée de $\sqrt{1.02}$ et estimer l'erreur.
13. Donner une valeur approchée de $\sin\left(\frac{1}{100}\right)$ et estimer l'erreur.
14. Déterminer le DL d'ordre 3, au voisinage de 0, de la fonction : $f : x \mapsto \arcsin(x)$. En déduire $\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin(x)}{x}$ et la position de la courbe représentative de f par rapport à la première bissectrice.
15. Étudier la présence éventuelle d'asymptotes ou de directions asymptotiques pour le graphe des fonctions suivantes quand x tend vers $+\infty$:
    (a) $f(x) = \frac{(x^3+1)^{1/2}}{(x^5+x^4-2x)^{\frac{1}{3}}}$
    (b) $f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)\arctan(x)$
    (c) $f(x) = \left(x^2+\frac{1}{x}\right)^{1/3}$
16. Montrer que la fonction $\ln(1+e^x)$ est une fonction convexe (voir exercice 13 du chapitre 2). En déduire que si n est un entier positif et a_i, b_i des réels positifs pour $i = 1, 2, \ldots, n$, on a :
$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n}(a_i+b_i)} \geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i}\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} b_i}$$

Chapitre 5

L'intégrale

1 Définition de $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur l'intervalle $[a,b]$ ($a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$).
Donnons nous, pour chaque entier positif n, un découpage de $[a,b]$ en n intervalles ; un tel découpage est obtenu en marquant $n+1$ points : $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$; on dit que $\sigma_n = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ est une subdivision de $[a,b]$.
Le pas de cette subdivision est par définition le maximum des longueurs $x_1 - x_0, x_2 - x_1, \ldots, x_n - x_{n-1}$; le pas mesure la "finesse" du découpage associé à la subdivision. Notons δ_n le pas de la subdivision σ_n.
À chaque subdivision σ_n, on peut associer une somme :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)(x_{k+1} - x_k) = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\Delta x_k$$

Interprétation géométrique : S_n représente une aire ; si f est positive sur $[a,b]$, S_n est la somme des aires des rectangles de base $[x_k, x_{k+1}]$ sur l'axe Ox et de hauteur $f(x_k)$.
Si f est de signe quelconque, il faut compter négativement l'aire des rectangles situés dans le demi plan $y \leq 0$.
Il est alors intuitif que si lorsque n augmente indéfiniment le pas δ_n du découpage σ_n tend vers zéro, alors les sommes S_n tendent vers l'aire de la région $\Sigma_f = \{(x,y); a \leq x \leq b \text{ et } 0 \leq y \leq f(x) \text{ ou } f(x) \leq y \leq 0\}$
Ces considérations rendent plausibles le théorème suivant que nous admettrons :

Théorème 5.1 *Si $\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$ alors S_n tend vers une limite finie indépendante de la suite de subdivisions σ_n utilisée. Cette limite est appelée l'intégrale de f sur l'intervalle $[a,b]$ et elle est notée $\int_a^b f(x)dx$.*

Exemple : Prenons $f(x) = 1$; alors $S_n = \sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1} - x_k) = x_n - x_0 = b - a$. On voit donc que $\int_a^b \mathrm{d}x = (b-a)$

Conventions : on pose $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$. On convient aussi que l'intégrale de f sur un intervalle réduit à un point est nulle : $\int_c^c f(x)\mathrm{d}x = 0$ pour tout $c \in [a, b]$.

Extension : tout ce qui précède s'étend au cas d'une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$ sauf sur un nombre fini de points où f admet une limite à droite et une limite à gauche finies (discontinuité de première espèce).

2 Premières propriétés

Les trois propriétés suivantes se déduisent facilement de la définition de l'intégrale :

2.1 Linéarité de l'intégrale

Si f et g sont continues sur l'intervalle I, si $a, b \in I$ et si $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

et

$$\int_a^b \lambda f(x)\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

2.2 Relation de Chasles

Si $f : I \to \mathbb{R}$ est continue sur l'intervalle I et si a, b, c sont trois points quelconques de I, on a :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x \tag{5.1}$$

2.3 Inégalités :

Soient f et g deux fonctions continues sur l'intervalle $I = [a, b]$ (on suppose $a \leq b$). Alors :

- si $f(x) \leq g(x)$ sur $[a, b]$, on a : $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$
  En particulier, l'intégrale sur $[a, b]$ d'une fonction positive est positive.
- si $f(x)$ reste compris entre les réels m et M sur I ($m \leq f(x) \leq M$) alors : $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq M(b-a)$.

Exercice : déduire de l'une de ces propriétés l'inégalité :

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$$

où $a \leq b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est supposée continue.
Cette inégalité permet par exemple de montrer le théorème suivant :

Théorème 5.2 *Si f est une fonction intégrable sur $[a,b]$, la fonction $F\ : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ ($a \leq x \leq b$) est continue sur $[a,b]$*

En effet $0 \leq |F(x) - F(x_0)| = \left|\int_{x_0}^x f(t)\mathrm{d}t\right| \leq \int_{x_0}^x |f(xt)|\mathrm{d}t \leq (x - x_0)H$ où H est un majorant de $f(t)$ sur $]x_0, x[$. On en déduit que si $x - x_0 \to 0$ alors $f(x) - f(x_0) \to 0$.

Exercice : déduire de la propriété 2.3 et du théorème des accroissements finis, le théorème suivant :

Théorème 5.3 *Si f est une fonction intégrable sur $[a,b]$, il existe un nombre $c \in]a,b[$ tel que $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$.*

Définition 5.1 *Soit f est une fonction intégrable sur $[a,b]$, le nombre $\lambda = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$ est appelé valeur moyenne de f sur $[a,b]$.*

3 Primitives et intégrales

Le théorème suivant est fondamental :

Théorème 5.4 *Soit $f\ : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur l'intervalle I et $a \in I$. On suppose que I n'est pas réduit à un point. Posons, pour $x \in I$: $\phi(x) = \int_a^x f(t)dt$; alors ϕ est dérivable sur I et $\phi'(x) = f(x)$ sur I.*

Démonstration : prenons $x_0 \in I$ et $h > 0$ tel que $x_0 + h \in I$. On a, d'après la formule de Chasles :

$$\frac{\phi(x_0 + h) - \phi(x_0)}{h} - f(x_0) = \frac{1}{h}\left(\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\mathrm{d}t\right) - f(x_0)$$

si h est assez petit, on aura : $f(x_0) - \epsilon \leq f(t) \leq f(x_0) + \epsilon$ pour tout $t \in [x_0, x_0 + h]$ ($\epsilon > 0$ donné), puisqu'on a supposé f continue. En intégrant sur $[x_0, x_0 + h]$:

$$h(f(x_0) - \epsilon) \leq \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\mathrm{d}t \leq h(f(x_0) + \epsilon)$$

et

$$-\epsilon \leq \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\mathrm{d}t - f(x_0) \leq \epsilon$$

ce qui prouve que $\frac{\phi(x_0+h)-\phi(x_0)}{h}$ tend, lorsque $h > 0$ tend vers zéro, vers $f(x_0)$.
Une étude plus approfondie montre qu'en fait :

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{\phi(x_0 + h) - \phi(x_0)}{h} = f(x_0)$$

Ce qui donne le théorème.

Corollaire 5.1 *Toute fonction continue f sur un intervalle I (non réduit à un point) admet une infinité de primitives sur I ; ce sont les fonctions de la forme :*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt + C$$

où C est une constante réelle et $a \in I$ fixé.

Cet énoncé découle du théorème 5.4 et du corollaire 2.1.
Un autre corollaire est la formule de base du calcul des intégrales :

Corollaire 5.2 *Si $f : I \to \mathbb{R}$ est continue sur l'intervalle I, si $a, b \in I$ et si F est primitive de f sur I, on a :*

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

Exemples :

1. pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\alpha \neq -1$, $0 < a \leq b$:
$$\int_a^b x^\alpha \mathrm{d}x = \frac{b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}}{\alpha + 1}$$
2. $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = [\arctan(x)]_0^1 = \frac{\pi}{4}$
3. $\int_0^{1/2} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$

3.1 *Intégrales indéfinies*

Soit f une fonction continue sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$: $\int f(x)\mathrm{d}x$ désigne n'importe laquelle des primitives de f sur I, exprimée comme fonction de x. C'est une notation commode mais ambiguë : $\int f(x)\mathrm{d}x$ n'est définie qu'à une constante près. On convient de dire que $\int f(x)\mathrm{d}x$ est une intégrale indéfinie.

Exemples :

1. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x) + C$ sur $]-1, +1[$
2. $\int \frac{u'(x)}{u(x)}\mathrm{d}x = \ln|u(x)| + C$ sur I (pour $u : I \to \mathbb{R}$ dérivable à dérivée continue sur I, u ne s'annulant pas sur I)
3. Calcul de $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+bx+c}$ sur I, en supposant que le trinôme $x^2 + bx + c$ admet deux racines réelles distinctes α et β (c'est-à-dire $b^2 - 4ac > 0$), I ne contenant ni α ni β. On a :
$$\frac{1}{x^2 + bx + c} = \frac{1}{(x-\alpha)(x-\beta)} = \frac{1}{(\alpha - \beta)}\left(\frac{1}{(x-\alpha)} - \frac{1}{(x-\beta)}\right)$$
d'où :
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + bx + c} = \frac{1}{(\alpha-\beta)} \ln\left|\frac{x-\alpha}{x-\beta}\right| + C$$
sur I

Exercice : Calculer $\int \cos^2(x)\mathrm{d}x$, $\int \cos^3(x)\mathrm{d}x$ (sur $\mathbb{R}$)

4 La formule d'intégration par parties

Théorème 5.5 *Soient f et g deux fonctions admettant chacune une dérivée continue sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$. Alors :*

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx \quad \textit{sur } I \tag{5.2}$$

et si a et b sont deux points de I :

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx \quad \textit{sur } I \tag{5.3}$$

En effet, $f(x)g(x)$ est, sur I, une primitive de $f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$, par conséquent, $f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\mathrm{d}x$ est la primitive générale de $f'(x)g(x)$ sur I. Ce qui explique la formule 5.2.

Pour la formule 5.3, on écrit :

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x + \int_a^b f'(x)g(x)\mathrm{d}x &= \int_a^b (f(x)g'(x) + f'(x)g(x))\mathrm{d}x \\ &= \int_a^b [f(x)g(x)]'\,\mathrm{d}x \\ &= [f(x)g(x)]_a^b\end{aligned}$$

Exemples :

1. $\int \ln(x)\mathrm{d}x = x\ln(x) - \int \mathrm{d}x = x\ln(x) - x + C$, sur $]0, +\infty[$. (On a posé $f(x) = \ln(x)$ et $g(x) = x$).
2. la même méthode fournit $\int \arcsin(x)\mathrm{d}x$ (sur $]-1, +1[$) :
$$\int \arcsin(x)\mathrm{d}x = x\arcsin(x) - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = x\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + C$$
3. **Exercice :** calculer de même : $\int \arctan(x)\mathrm{d}x$
4. primitive d'une fonction polynôme exponentielle : par exemple $\int x^2e^x\mathrm{d}x$:
$$\int x^2e^x\mathrm{d}x = \int x^2\,(e^x)'\,\mathrm{d}x = x^2e^x - 2\int xe^x\mathrm{d}x$$
en intégrant par parties on a :
$$\int xe^x\mathrm{d}x = \int x\,(e^x)'\,\mathrm{d}x = xe^x - \int e^x\mathrm{d}x = xe^x - e^x + C$$
soit finalement :
$$\int x^2e^x\mathrm{d}x = (x^2 - 2x + 2)e^x + C \qquad (\text{sur } \mathbb{R})$$

5. **Exercice :** calculer $\int x^2e^{2x}\mathrm{d}x$, $\int x^3e^{2x}\mathrm{d}x$, $\int x\cos(x)\mathrm{d}x$
6. **Exercice :** calculer $\int e^x\cos(x)\mathrm{d}x$ à l'aide de deux intégrations par parties.

5 La formule du changement de variable

Soient f une fonction réelle continue sur l'intervalle I, F une primitive de f sur I, et $\phi\ : J \to I$ une fonction admettant une dérivée continue sur l'intervalle J, à valeurs dans I. On a alors la formule suivante :

Théorème 5.6 (formule du changement de variable dans les intégrales indéfinies) *Si on pose $x = \phi(t)$,*

$$\int f(x)dx = \int f(\phi(t))\phi'(t)dt$$

Cette formule signifie qu'on passe du membre de gauche (primitive quelconque $F(x)$ de $f(x)$ sur I) au membre de droite (primitive quelconque de $f(\phi(t))\phi'(t)$ sur J) en remplaçant x par $\phi(t)$.
La preuve est immédiate : $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(\phi(t)) = F'(\phi(t))\phi'(t) = f(\phi(t))\phi'(t)$ sur J. Ce qui montre que $F(\phi(t))$ est une primitive de $f(\phi(t))\phi'(t)$ sur J.
En pratique, on part, par exemple de $\int f(x)\mathrm{d}x$, on "pose" $x = \phi(t)$ et on remplace l'intégrale définie x par $\phi(t)$, et $\mathrm{d}x$ par $\phi'(t)\mathrm{d}t$. On écrit :

$$x = \phi(t) \quad , \quad \mathrm{d}x = \phi'(t)\mathrm{d}t$$

on retrouve la deuxième formule en dérivant par rapport à t les deux membres de la relation $x = \phi(t)$: on obtient $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \phi'(t)$, d'où en multipliant par $\mathrm{d}t$: $\mathrm{d}x = \phi'(t)\mathrm{d}t$.
On dit que $\mathrm{d}x = \phi'(t)\mathrm{d}t$ est la relation qui relie $\mathrm{d}x$ et $\mathrm{d}t$ (qui sont les accroissements infinitésimaux de x et t) si x et t sont liées par la relation $x = \phi(t)$.
Il importe de remarquer qu'on trouve la même relation entre $\mathrm{d}x$ et $\mathrm{d}t$ si on part de la formule $t = \psi(x)$ où ψ est la fonction réciproque de ϕ (en supposant qu'elle existe et que ϕ' ne s'annule pas) ; on obtient en effet :

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \psi'(x) = \frac{1}{\phi'(\psi(x))} = \frac{1}{\phi'(t)} \quad \text{d'où} \quad \phi'(t)\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$$

Exemple : calcul de $I = \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+bx+c}$ sur $\mathbb{R}$, lorsque le trinôme x^2+bx+c n'a pas de racines réelles, et $b, c \in \mathbb{R}$ (donc $b^2 - 4ac < 0$).
On met le trinôme sous la forme canonique :

$$x^2+bx+c = \left(x+\frac{b}{2}\right)^2 + \left(c-\frac{b}{4}\right)^2 = \left(x+\frac{b}{2}\right)^2 + \beta^2$$

où $\beta = \sqrt{c - \frac{b^2}{4}}$. D'où :

$$I = \frac{\mathrm{d}x}{\left(x+\frac{b}{2}\right)^2 + \beta^2} = \frac{\mathrm{d}x}{\beta^2\left\{\left(\frac{x+b/2}{\beta}\right)^2 + 1\right\}}$$

on fait le changement de variable $X = \frac{x+b/2}{\beta}$, d'où d$x = \beta$dX et :

$$I = \int \frac{1}{\beta}\frac{\mathrm{d}X}{1+X^2} = \frac{1}{\beta}\arctan(X) + C = \frac{1}{\beta}\arctan\left(\frac{x+b/2}{\beta}\right) + C$$

Pour les intégrales définies, on a la formule suivante :

Théorème 5.7 *Soient* $f\ : I \to \mathbb{R}$ *une fonction continues sur l'intervalle* $I \subset \mathbb{R}$*, et* $\phi\ : [\alpha, \beta] \to I$ *une fonction admettant une dérivée continue sur l'intervalle* $[\alpha, \beta]$*. On a alors :*

$$\int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\phi(t))\phi'(t)dt$$

Démonstration : posons pour $u \in [\alpha, \beta]$, $G(u) = \int_a^{\phi(u)} f(x)\mathrm{d}x$, c'est-à-dire $G(u) = F(\phi(u))$, si on note $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$, $(x \in I)$.
Comme $F'(x) = f(x)$, on a $G'(u) = f(\phi(u))\phi'(u)$, et par conséquent :

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\phi(u))\phi'(u)\mathrm{d}u = [F(\phi(u))]_{u=\alpha}^{u=\beta} = (F(\phi(\beta)) - F(\phi(\alpha))) = (F(b) - F(a)) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

Remarques :

1. il n'est pas nécessaire que ϕ envoie $[\alpha, \beta]$ sur $[a, b] = [\phi(\alpha), \phi(\beta)]$ (ou $[b, a]$ si $\phi(\alpha) > \phi(\beta)$) mais il est essentiel que f soit définie, continue sur un ensemble contenant toutes les valeurs de ϕ.
2. En pratique, on transformera $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ en posant $x = \phi(t)$, d$x = \phi'(t)$dt mais il ne faut pas oublier de changer aussi les bornes d'intégrations, en remplaçant a, b par α, β.

Exemples :

1. calcul de $I = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2}$. Posons $x = \tan(\theta)$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ (donc $\theta = \arctan(x)$). D'où d$\theta = \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$ et :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}\theta}{(1+\tan^2(\theta))} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2(\theta)\mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\cos(2\theta)}{2}\mathrm{d}\theta$$

   et finalement :

$$I = \left[\frac{\sin(2\theta)}{4} + \frac{\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$$

2. changement de variable $t = \tan(\theta/2)$.

   Ce changement de variable est souvent utilisée dans le calcul des intégrales dont l'intégrant est une fonction de $\sin(\theta)$ et $\cos(\theta)$, θ désignant la variable d'intégration.

Supposons, par exemple $0 < \theta < \pi$ et posons $t = \tan(\theta/2)$ où $\theta = 2\arctan(t)$. On a alors : $\sin(\theta) = 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = 2t\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$ et comme $1+\tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}$, on obtient :

$$\sin(\theta) = \frac{2t}{1+t^2} \tag{5.4}$$

De même :

$$\cos(\theta) = 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1 = \frac{2}{1+t^2} - 1 = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

c'est-à-dire :

$$\cos(\theta) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \tag{5.5}$$

Enfin puisque $\theta = 2\arctan(t)$

$$\mathrm{d}\theta = \frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t \tag{5.6}$$

On utilise les formules 5.4, 5.5, 5.6 pour effectuer le changement de variable. En voici deux exemples :

(a) $I = \int \frac{\mathrm{d}\theta}{\sin(\theta)}$, $0 < \theta < \pi$; on obtient :

$$I = \int \frac{1+t^2}{2t}\frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln|t| + C$$

et finalement :

$$\int \frac{\mathrm{d}\theta}{\sin(\theta)} = \ln(\tan(\theta/2)) + C \qquad \text{sur }]0,\pi[$$

(b) calcul de $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\theta}{5+3\cos(\theta)}$. On trouve :

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 \frac{1+t^2}{5(1+t^2)+3(1-t^2)}\frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2} = \int_0^1 \frac{2\mathrm{d}t}{8+2t^2} = \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+\left(\frac{t}{2}\right)^2} \\ &= \frac{1}{2}\left[\arctan\left(\frac{t}{2}\right)\right]_0^1 = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

3. lorsqu'apparaît dans l'expression à intégrer $\sqrt{1-x^2}$ (x : variable d'intégration), on peut essayer le changement de variable $x = \sin(\theta)$. Calculons par exemple $I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$:
En posant $x = \sin(\theta)$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, on obtient :

$$\begin{aligned} 1 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2(\theta)}\cos(\theta)\mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(\theta)\mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2\theta)}{2}\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{4}\left[\sin(2\theta)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}\left[\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

6 Quelques applications de l'intégrale

6.1 *Calcul d'aires*

À titre d'exemple, on va calculer l'aire A d'un disque plan D_R de rayon R, dont le centre est à l'origine des axes : $D_R = \{(x,y); x^2+y^2 \leq R\}$.
En notant que $x^2+y^2 \leq R \Longleftrightarrow |y| \leq \sqrt{R^2-x^2}$, on voit que $A = 2\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}\mathrm{d}x$.
On calcule alors A à l'aide du changement de variable $x = R\sin(\theta)$, $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ et on trouve $\sqrt{R^2-x^2} = R\cos(\theta)$, $\mathrm{d}x = R\cos(\theta)\mathrm{d}\theta$ et :

$$\begin{aligned} A &= 2R^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2(\theta)\mathrm{d}\theta = 2R^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos(2\theta)}{2}\mathrm{d}\theta \\ &= \pi R^2 \end{aligned}$$

Exercice : calculer plus généralement l'aire de l'ellipse : $D = \{(x,y); \frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b} \leq 1\}$ (a, b étant deux nombres positifs donnés).

6.2 *Longueur d'un arc de courbe*

On se donne deux fonctions $X, Y \ : I \to \mathbb{R}$ admettant des dérivées continues sur l'intervalle I.
Notant $M_t = (X(t), Y(t))$, le point du plan Oxy, de coordonnées $X(t)$ et $Y(t)$, on obtient un point mobile qui, lorsque t varie de a à b ($a, b \in I$, $a < b$) parcourt un arc de courbe γ_a^b dont on veut exprimer la longueur $|\gamma_a^b|$. La formule est la suivante :

$$|\gamma_a^b| = \int_a^b \sqrt{X'(t)^2+Y'(t)^2}\mathrm{d}t$$

Remarques : si on interprète t comme le temps, $\sqrt{X'(t)^2+Y'(t)^2}$ est la longueur $|\overrightarrow{V(t)}|$ de la vitesse $\overrightarrow{V(t)}$ du point M_t à l'instant t, et la formule est $|\gamma_a^b| = \int_a^b \overrightarrow{V(t)}\mathrm{d}t$.
Lorsque t effectue une petite variation $\mathrm{d}t$, M_t parcourt un élément de courbe de longueur : $\mathrm{d}l = |\overrightarrow{V(t)}|\mathrm{d}t$. La longueur $|\gamma_a^b|$ est la somme des longueurs $\mathrm{d}l_i$ correspondant à une suite de petites variations $\mathrm{d}t_i = t_{i+1}-t_i$, conduisant de $t_0 = a$ à $t_n = b$:

$$|\gamma_a^b| \approx \sum_{i=0}^{n}|V(t_i)|\mathrm{d}t_i \approx \int_a^b |V(t)|\mathrm{d}t$$

ce qui explique la formule.

Exemple : arc de cercle.

$$\begin{cases} X = R\cos(\theta) \\ Y = R\sin(\theta) \end{cases} \qquad \text{où } \theta_0 \leq \theta \leq \theta_1$$

On obtient facilement $l = \int_{\theta_0}^{\theta_1} R\mathrm{d}\theta = R(\theta_1-\theta_0)$.
Le cercle entier est de longueur $l = 2\pi R$

6.3 *Centre de gravité d'une tige rectiligne*

on considère une tige rectiligne T assimilée à un intervalle $[a,b]$ sur un axe $\overrightarrow{Ox}$. On suppose que T admet une densité de masse ρ, continue sur $[a,b]$: cela signifie que ρ est une fonction continue positive sur $[a,b]$ et que si x est un point de $[a,b]$, I un intervalle contenant x, de longueur Δx, la masse de la portion de la tige contenue dans I est :

$$m(I) = \rho(x)\Delta(x)$$

à un infiniment petit d'ordre supérieur à 1 en $\Delta(x)$, près.
On montre alors qu'on peut exprimer à l'aide de ρ la masse totale M de (T) et l'abscisse x_G de son centre de gravité par les formules :

$$\begin{aligned} M &= \int_a^b \rho(x)\mathrm{d}x \\ x_G &= \frac{\int_a^b x\rho(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b \rho(x)\mathrm{d}x} \end{aligned}$$

7 Extension de la notion d'intégrale définie

En premier lieu, on envisagera le cas où l'intervalle d'intégration est non borné :

Définition 5.2 • *Soit une fonction f intégrable sur tout segment $[a,x]$, avec $x > a$. On dit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)dt$* converge *ou* a un sens *si l'intégrale $\int_a^x f(t)dt$ tend vers une limite finie I lorsque x tend vers $+\infty$ et on écrit : $\int_a^{+\infty} f(t)dt = I$. Dans le cas contraire on dit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)dt$* diverge.
• *Soit une fonction g intégrable sur tout segment $[x,b]$, avec $x < b$. On dit, de même, que l'intégrale $\int_{-\infty}^b g(t)dt$* converge *si l'intégrale $\int_y^b g(t)dt$ tend vers une limite finie J lorsque y tend vers $-\infty$ et on écrit : $\int_{-\infty}^b f(t)dt = J$.*

Exemples :

- Étude de $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^5}$
  La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^5}$ est continue, donc intégrable, sur tout segment $[1,x]$, avec $x > 1$.
  On a :
  $$\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t^5} = \left[-\frac{1}{4t^4}\right]_1^x = -\frac{1}{4x^4} + \frac{1}{4}$$
  $\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t^5} \longrightarrow \frac{1}{4}$ lorsque $x \longrightarrow +\infty$. L'intégrale proposée converge et on a :
  $$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^5} = \frac{1}{4}$$
- Étude de $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$

La fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ est continue, donc intégrable, sur tout segment $[1, x]$, avec $x > 1$. On a :

$$\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = \left[2\sqrt{t}\right]_1^x = 2\sqrt{x} - 2$$

$\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} \longrightarrow +\infty$ lorsque $x \longrightarrow +\infty$. L'intégrale proposée diverge

Définition 5.3 *Soit une fonction f intégrable sur tout segment. On dit que l'intégrale* $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge *ou* a un sens *si chacune des intégrales* $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ *et* $\int_{-\infty}^a f(t)dt$ *converge, le réel a étant choisi arbitrairement. On pose alors :*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_{-\infty}^{a} f(t)dt + \int_{a}^{+\infty} f(t)dt$$

Dans tous les cas contraire, on dit que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ diverge.

Pour que cette définition ait un sens, il faut évidemment démontrer que le choix de a n'a pas d'importance. Soit $b \neq a$. On a, d'après la relation de Chasles (équation 5.1) :

$$\int_b^x f(t)\mathrm{d}t = \int_b^a f(t)\mathrm{d}t + \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

Il est alors clair que les deux intégrales $\int_b^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ et $\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ convergent ou divergent ensemble ; le choix de a n'a donc pas d'importance. De plus si il y a convergence :

$$\int_b^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \int_b^a f(t)\mathrm{d}t + \int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$$

On a de même :

$$\int_y^b f(t)\mathrm{d}t = \int_y^a f(t)\mathrm{d}t + \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$$

et, si il y a convergence :

$$\int_{-\infty}^b f(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^a f(t)\mathrm{d}t + \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$$

On en déduit, toujours dans l'hypothèse de convergence :

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^b f(t)\mathrm{d}t + \int_b^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t &= \int_{-\infty}^a f(t)\mathrm{d}t + \int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t + \int_a^b f(t)\mathrm{d}t + \int_b^a f(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\infty}^a f(t)\mathrm{d}t + \int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

car $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = -\int_b^a f(t)\mathrm{d}t$.

Exemples :

- Étude de $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$
  La fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est continue, donc intégrable, sur tout segment. On a :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} &= \lim_{x\to+\infty}\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \lim_{x\to+\infty}[\arctan(t)]_0^x = \frac{\pi}{2}\\ \int_{-\infty}^{0} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} &= \lim_{y\to-\infty}\int_y^0 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \lim_{y\to-\infty}[\arctan(t)]_y^0 = \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

  et donc :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \pi$$

- Étude de $\int_{-\infty}^{+\infty} t\mathrm{d}t$
  La fonction identité est continue, donc intégrable, sur tout segment. On a :

$$\int_0^{+\infty} t\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty}\int_0^x t\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x = +\infty$$

  L'intégrale proposée diverge. Il n'est pas nécessaire de considérer $\int_{-\infty}^{0} t\mathrm{d}t$ qui, par ailleurs, diverge également

On considère maintenant le cas où la fonction à intégrer devient infinie pour l'une des bornes d'intégration.

Définition 5.4 • *Soit une fonction f intégrable sur tout segment $[a,x]$, avec $a < x < b$ et telle que $f(t) \to \infty$ lorsque $t \to b^-$. On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$* converge *ou* a un sens *si l'intégrale $\int_a^x f(t)dt$ tend vers une limite finie I lorsque x tend vers b par valeurs inférieures et on écrit : $\int_a^b f(t)dt = I$. Dans le cas contraire on dit que l'intégrale* $\int_a^b f(t)dt$ diverge.
• *Soit une fonction g intégrable sur tout segment $[y,b]$, avec $a < y < b$ et telle que $g(t) \to \infty$ lorsque $t \to a^+$. On dit, de même, que l'intégrale $\int_a^b g(t)dt$* converge *si l'intégrale $\int_y^b g(t)dt$ tend vers une limite finie J lorsque y tend vers a à droite et on écrit : $\int_a^b f(t)dt = J$.*

Exemples :

- Étude de $\int_0^4 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$
  La fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ est continue, donc intégrable, sur tout segment $[x,4]$, avec $0 < x < 4$. On a :

$$\int_x^4 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = \left[2\sqrt{t}\right]_x^4 = 4 - 2\sqrt{x}$$

$$\lim_{x\to0^+}\int_x^4 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = 4$$

L'intégrale proposée converge et on a :

$$\int_0^4 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = 4$$

- Étude de $\int_{-1}^0 \frac{\mathrm{d}t}{t^4}$
  La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^4}$ est continue, donc intégrable, sur tout segment $[-1, x]$, avec $-1 < x < 0$. On a :
  $$\int_{-1}^x \frac{\mathrm{d}t}{t^4} = \left[-\frac{1}{3t^3}\right]_{-1}^x = -\frac{1}{3x^3} - \frac{1}{3}$$
  $$\lim_{x\to 0^-} \int_{-1}^x \frac{\mathrm{d}t}{t^4} = +\infty$$
  L'intégrale proposée diverge.

Définition 5.5 *Soit une fonction f intégrable sur tout segment $[x, y]$ avec $a < x < y < b$ et telle que $f(t)$ tend vers l'infini lorsque t tend vers a à droite et lorsque t tend vers b à gauche. On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$* converge *ou* a un sens *si chacune des intégrales $\int_a^c f(t)dt$ et $\int_c^b f(t)dt$ converge, le réel c étant choisi arbitrairement. On pose alors :*

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$$

Dans tous les cas contraire, on dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ diverge.

Exemple : calculer, si possible, $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(1-t)}}$
La fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}$ est continue, donc intégrable, sur tout segment $[x, y]$, avec $0 < x < y < 1$.
On remarque que : $\frac{1}{\sqrt{t(1-t)}} = \frac{1}{\sqrt{t-t^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2}} = \frac{2}{\sqrt{1-(2t-1)^2}}$.

$$\begin{aligned}
\int_0^{1/2} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(1-t)}} &= \int_0^{1/2} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-(2t-1)^2}} = \lim_{x\to 0^+} [\arcsin(2t-1)]_0^{1/2} = -\left(-\frac{\pi}{2}\right) \\
\int_{1/2}^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(1-t)}} &= \int_{1/2}^1 \frac{2\mathrm{d}t}{\sqrt{1-(2t-1)^2}} = \lim_{y\to 1^-} [\arcsin(2t-1)]_{1/2}^1 = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

L'intégrale proposée converge et on a :

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(1-t)}} = \pi$$

8 Exercices

1. **Vrai ou Faux ?**
   (a) une fonction linéaire admet une primitive linéaire
   (b) $\int_a^b f'(x)g(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x$
   (c) si g est une fonction de primitive connue, on connaît une primitive de $g^2(x)$
   (d) si g est une fonction de primitive connue, on connaît une primitive de $g(ax+b)$
   (e) la valeur moyenne de f sur $[a, b]$ est le nombre :
   $$\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x$$
2. on pose $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \mathrm{d}x$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \mathrm{d}x$ calculer I et J par l'intermédiaire de $I + J$ et $I - J$.
3. Calculer la valeur moyenne de la fonction $f \ : t \mapsto \cos^2(t)$ sur $[0, \pi]$. (Ce calcul permet d'obtenir l'intensité efficace d'un courant alternatif).
4. Calculer les intégrales de Wallis :
   $$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n \mathrm{d}x \\ J_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \mathrm{d}x \end{aligned}$$
   où $n \in \mathbb{N}$
5. calculer les intégrales :
   (a) $\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}} \frac{x\mathrm{d}x}{9-4x^4}$
   (b) $\int_0^1 \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{4-x^2}}$
   (c) $\int_0^1 \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{4-x^4}}$
   (d) $\int_{-4/3}^{-1} \frac{\mathrm{d}x}{9x^2+18x+10}$
   (e) $\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+1}$
   (f) $\int_0^{-1} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+2}$
   (g) $\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{5+3\cos(\theta)}$
   (h) $\int_0^{\frac{\pi}{12}} \frac{\mathrm{d}\theta}{1+\sin(6\theta)}$
   (i) $\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\mathrm{d}x$
   (j) $\int_0^1 \sqrt{8 - 2x^2}\mathrm{d}x$

(k) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \mathrm{d}x$

(l) $\int_{-1}^0 \frac{\mathrm{d}x}{4x^2+4x+2}$

6. soit, dans un repère orthonormé, l'ellipse d'équation :

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1$$

   (a) calculer l'aire limitée par l'ellipse ;
   (b) calculer le volume de l'ellipsoïde de révolution obtenu par rotation de l'ellipse autour de l'axe $x'Ox$
   (c) application au cas où $a = b$
7. Calculer le volume du cône de révolution de hauteur H et de rayon de base R. S'il s'agit d'un solide homogène, déterminer son centre de masse et son moment d'inertie par rapport à l'axe de révolution.
8. On considère un récipient de forme cylindrique et dont l'axe de révolution est horizontal. On le remplit à moitié d'un liquide de masse spécifique ρ. Calculer la force qui s'exerce sur l'une des faces planes du cylindre.
9. Trouver tous les polynômes $P(t)$ du second degré en t, à coefficients réels, tels que, quel que soit un polynôme $Q(t)$ à coefficients réels et de degré strictement inférieur à 2, on ait : $\int_{-1}^2 Q(t)P(t)\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = 0$
10. Soient r et s des réels positifs ou nuls. On pose :

$$I(r,s) = \int_0^1 t^r(1-t)^s \mathrm{d}t$$

   (a) calculer $I(r, 0)$
   (b) quel résultat obtient-on par le changement de variable $x = 1 - t$?
   (c) par intégration par parties, obtenir une relation entre $I(r, s+1)$ et $I(r+1, s)$.
   (d) calculer $I(p, q)$ lorsque p et q sont deux entiers positifs ou nuls.
11. En utilisant la décomposition en éléments simples des fractions rationnelles, calculer :
   (a) $\int_{-1}^1 \frac{x^4+x^2}{x^6+2x^4+x^2}\mathrm{d}x$
   (b) $\int_{-1}^2 \frac{x^3+x}{x^6+2x^4+x^2}\mathrm{d}x$
   (c) $\int_2^{+\infty} \frac{x^5+x^4+5x^3+8x^2+16}{x^7+8x^5+16x^3}\mathrm{d}x$
   (d) $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+2}$
   (e) $\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2}$
12. calculer, en négligeant la résistance de l'air, la vitesse qu'il faut communiquer à un projectile lancé verticalement pour qu'il "échappe" à l'attraction terrestre. On rappelle qu'un projectile de masse m est, à la distance r du "centre" de la terre soumis à l'attraction $F = \frac{km}{r^2}$ et que, pour $r \approx 6350$km, l'accélération de la pesanteur est $g \approx 9.8$m.sec^{-2}.

13. On considère la suite de terme général $J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x$ où n est un entier positif ou nul.
    (a) calculer J_0 et J_1
    (b) montrer que $J_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t) \mathrm{d}t$
    (c) établir une relation de récurrence entre J_n et J_{n-2}
    (d) calculer J_n ($n \geq 2$)
    (e) montrer que la suite J_n est convergente, puis déterminer sa limite à partir du produit $J_n J_{n-1}$

Chapitre 6

Fonction de plusieurs variables

1 Introduction

Définition 6.1 *On appelle fonction numérique de n variables réelles une application f d'une partie D de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. On dit que f est définie sur le domaine D.*

On note :

$$f : \begin{cases} D & \longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, \ldots, x_n) & \longmapsto \quad f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{cases}$$

ou plus simplement $f : (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté sur D.
On note également :

$$f : \begin{cases} D & \longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ H & \longmapsto \quad f(H) \end{cases}$$

où $H = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est un "point" de $\mathbb{R}^n$ appartenant à D.

Exemple 6.1

- *la fonction $f : (x, y) \mapsto ax^2 + bxy + cy^2$ où a, b et c sont des réels donnés, est une fonction numérique de deux variables réelles, définie sur $\mathbb{R}^2$.*
- *la fonction $f : (x, y) \mapsto \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}$ est une fonction numérique de deux variables réelles définie pour tout couple (x, y) tel que $(x^2 + y^2) \leq R^2$, R étant un réel positif donné.*
- *la fonction $f : (x, y) \mapsto \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ est une fonction numérique de deux variables réelles définie sur $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.*
- *la fonction $f : (x, y) \mapsto \frac{x^2\sqrt{y-2}}{z-3}$ est une fonction numérique de trois variables réelles définie pour tout triplet (x, y, z) tel que : $y \geq 2$, $z \neq 3$.*

1.1 Représentation graphique

Dans le cas particulier d'une fonction de deux variables, on peut utiliser des représentations géométriques.

Si on choisit, par exemple, un trièdre orthonormé direct, un couple (x, y) de D est représenté par un point H du plan xOy, auquel on peut associer les $M(x, y, f(x, y))$.
Si D est représenté par une surface plane, alors l'ensemble des points $M(x, y, f(x, y))$ constitue également une surface.

Exemple 6.2 *Soit $f : (x, y) \mapsto \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}$. Le domaine de définition D défini par $(x^2 + y^2) \leq R^2$ est représenté par l'ensemble des points du disque circulaire de centre O et de rayon R.*
$z = \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)} \Leftrightarrow (x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ et $z \geq 0)$. L'ensemble des points $M(x, y, z)$ forme une demi-sphère de centre O et de rayon R.

Dans le cas particulier d'une fonction de trois variables, il est encore possible de représenter le domaine de définition D par un ensemble de points de l'espace réel.
Pour une fonction de n variables, avec $n > 3$, on ne peut évidemment plus donner de représentation globale.

1.2 Limite

La notion de limite d'une fonction de plusieurs variables s'introduit comme pour les fonctions d'une variable. On a, par exemple, pour une fonction de deux variables (la généralisation est aisée) :

Définition 6.2 *On dit que $f(x, y) = f(H)$ tend vers une limite L lorsque (x, y) tend (x_0, y_0) ou lorsque $H(x, y)$ tend $H(x_0, y_0)$, si :*

$$\exists \epsilon > 0, \exists \alpha > 0 \text{ tel que } (|x - x_0| < \alpha \text{ et } |y - y_0| < \alpha \text{ avec } (x, y) \neq (x_0, y_0)) \Rightarrow |f(H) - L| < \epsilon$$

On écrit :

$$\lim_{H \to H_0} f(H) = \lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} f(x, y) = L$$

On notera :
- que la définition implique que la fonction f est définie sur un pavé ouvert entourant H_0 (un voisinage de H_0).
- que la définition entraîne l'unicité de la limite ; lorsqu'elle existe ;
- qu'on peut écrire un définition équivalente :

$$\exists \epsilon > 0, \exists \beta > 0 \text{ tel que } ||HH_0|| < \beta \text{ avec } H \neq H_0 \Rightarrow |f(H) - L| < \epsilon$$

- que les théorèmes, concernant la somme, le produit, et le quotient de deux fonctions admettant une limite lorsque H tend vers H_0, s'énoncent et s'établissent comme dans le cas des fonctions d'une variable ;
- qu'il est aisé de définir une limite infinie ainsi qu'une limite de $f(H)$ quand H s'éloigne indéfiniment.

Exemple 6.3 *Soit $f : (x, y) \mapsto (x + y) \sin \frac{1}{x^2+y^2}$*
f n'est pas définie en $(0, 0)$ mais on a $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$. En effet $(x + y) \to 0$ et $\sin \frac{1}{x^2+y^2}$ demeure borné.

Exemple 6.4 *Soit* $f : (x, y) \mapsto \frac{x^2\sqrt{y-2}}{z-3}$.
On considère $H_0(1, 3, 3)$ *où* f *n'est pas définie. On a :*

$$\lim_{H \to H_0} f(H) = +\infty \quad \textit{si} \quad z \to z + 0$$
$$\lim_{H \to H_0} f(H) = -\infty \quad \textit{si} \quad z \to z - 0$$

Il convient de préciser si H *tend vers* H_0 *avec une côte supérieure ou une côte inférieure.*

1.3 Continuité

La notion de continuité découle naturellement de la notion de limite. On aura en particulier pour une fonction de deux variables :

Définition 6.3 *On dit qu'une fonction* $f : (x, y) \mapsto f(x, y)$ *est continue au point* (x_0, y_0) *si :*

$$\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

Une fonction continue en tout point d'un domaine est dite continue sur ce domaine.

Théorème 6.1 *Si* f *et* g *sont deux fonctions continues au point* M_0*, il en est de même pour des fonctions* $f + g$*,* αf *(*$\alpha \in \mathbb{R}$*),* $f \times g$ *et si* $g(M_0) \neq 0$*,* f/g*.*

Il s'agit là d'une conséquence des théorèmes sur les limites.

Exemple 6.5 *Soit la fonction* $f : (x, y) \mapsto 3x - y + 1$.
Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}^2$*. Elle est continue sur* $\mathbb{R}^2$*, ce que l'on peut démontrer en s'appuyant sur la définition de la continuité. Quel que soit* (x_0, y_0)*, on a :*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha = \frac{\epsilon}{4} > 0 \textit{ tel que : } (|x - x_0| < \alpha, |y - y_0| < \alpha \textit{ et } (x, y) \neq (x_0, y_0)) \Rightarrow |f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \epsilon$$

En effet $|x - x_0| < \frac{\epsilon}{4} \Rightarrow 3|x - x_0| < \frac{3\epsilon}{4}$
Or $|f(x, y) - f(x_0, y_0)| = |3(x - x_0) - (y - y_0)| \leq 3|x - x_0| + |y - y_0|$.
Donc $|x - x_0| < \frac{\epsilon}{4}$ *et* $|y - y_0| < \frac{\epsilon}{4} \Rightarrow |f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \epsilon$

2 Fonctions composées

On peut envisager plusieurs types de composition

2.1 Fonction de fonction

Soit u une fonction de variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Soit f une fonction d'une variable. On peut définir la fonction :

$$\phi : (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto f(u(x_1, x_2, \ldots, x_n))$$

sous réserve, bien entendu, que $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ appartienne au domaine de définition de f.

Exemple 6.6 *La fonction* $\phi : (x, y, z) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ *est obtenue par composition de la fonction* $u : (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2$ *par la fonction* $f : u \mapsto \sqrt{u}$*.*

Théorème 6.2 *Si* u *est une fonction, de deux variables, continue au point* (x_0, y_0) *et si* f *est une fonction, d'une variable, continue au point* (x_0, y_0)*, la fonction* $\phi : (x, y) \mapsto f(u(x, y))$ *est continue au point* (x_0, y_0)*.*
On généralise aisément au cas où u *est une fonction de* n *variables.*

En effet puisque f est continue au point $u_0 = u(x_0, y_0)$, on peut trouver $\beta > 0$ tel que : $|u - u_0| < \beta \Rightarrow |f(u) - f(u_0)| < \epsilon$
Mais u est continue au point (x_0, y_0) ; il est donc possible de choisir $\alpha > 0$ tel que : $(|x - x_0| < \alpha$ et $|y - y_0| < \alpha) \Rightarrow |u(x, y) - u(x_0, y_0)| < \beta$. Donc il est possible d choisir $\alpha > 0$ tel que :

$$(|x - x_0| < \alpha \text{ et } |y - y_0| < \alpha) \Rightarrow |u(x, y) - u(x_0, y_0)| < \beta \Rightarrow |f(u(x, y)) - f(u(x_0, y_0))| < \epsilon$$

Exemple 6.7 *La fonction* $\phi : (x, y, z) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ *est continue dans* $\mathbb{R}^3$

2.2 *Fonction composée*

Soit $\phi : (u, v, w) \mapsto \phi(u, v, w)$ une fonction de 3 variables. Soient $f : x \mapsto u = f(x)$, $g : x \mapsto v = g(x)$, $h : x \mapsto h(x)$, trois fonctions d'une variable. On peut donc définit la fonction :

$$F : x \mapsto \phi(f(x), g(x), h(x))$$

sous réserve que le point $(f(x), g(x), h(x))$ appartienne au domaine de définition de ϕ. Une telle fonction est dite fonction composée de f, g et h par ϕ. On notera que F est fonction d'une variable. On généralise aisément au cas où F est fonction de n variables.

Exemple 6.8 *La fonction*

$$F :\mapsto \frac{\cos^2 x \times e^{x^2}}{x^2}$$

est une fonction composée. Elle est obtenue en composant les fonctions : $x \mapsto u = \cos^2 x$*,* $x \mapsto v = e^{x^2}$*,* $x \mapsto w = x^2$ *par la fonction* $(u, v, w) \mapsto \frac{uv}{w}$

Théorème 6.3 *Si* f*,* g *et* h *sont des fonctions, d'une variable, continues en* x_0 *et si* ϕ *est une fonction, de trois variables, continue au point* $u_0 = f(x_0)$*,* $v_0 = g(x_0)$*,* $w_0 = h(x_0)$*, la fonction* $F : x \mapsto \phi(f(x), g(x), h(x))$ *est continues en* x_0*.*
On généralise aisément au cas où ϕ *est une fonction de* n *variables.*

Ce théorème se démontre aisément, en utilisant le même schéma que pour la démonstration du théorème 6.2.

Exemple 6.9 *La fonction*

$$F :\mapsto \frac{\cos^2 x \times e^{x^2}}{x^2}$$

est continue sur $\mathbb{R}^*$*.*

2.3 Autre cas

Soient les fonctions $u : (x, y) \mapsto u(x, y)$, $v : (x, y) \mapsto v(x, y)$, $w : (x, y) \mapsto w(x, y)$ et soit la fonction $f : (u, v, w) \mapsto f(u, v, w)$. On peut alors définir la fonction :

$$F : (x, y) \mapsto f(u(x, y), v(x, y), w(x, y))$$

sous réserve que le point $(u(x, y), v(x, y), w(x, y))$ appartienne au domaine de définition de f.
On généralise aisément à la composition de n fonctions de p variables par une fonction de n variables.

Exemple 6.10 *La fonction*

$$F \mapsto \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

est obtenue en composant les fonctions $u(x, y) \mapsto u = x^2 - y^2$ *et* $(x, y) \mapsto v = x^2 + y^2$ *par la fonction* $(u, v) \mapsto \frac{u}{v}$

Théorème 6.4 *Si les fonctions, de deux variables,* u*,* v *et* w *sont continues au point* (x_0, y_0) *et si la fonction de trois variables, est continue au point* $(u(x_0, y_0), v(x_0, y_0), w(x_0, y_0))$*, la fonction*

$$F : (x, y) \mapsto f(u(x, y), v(x, y), w(x, y))$$

est continue au point (x_0, y_0).

Ce théorème se démontre aisément, en utilisant le même schéma que pour la démonstration du théorème 6.2.

Exemple 6.11 *La fonction*

$$F \mapsto \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$$

est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$

3 Dérivées partielles

Définition 6.4 *Soit la fonction de deux variables* $f : (x, y) \mapsto f(x, y)$.
On appelle dérivée partielle de f*, par rapport à la variable* x *et au point* (x_0, y_0)*, le nombre s'il existe :*

$$f'_x(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

On appelle de même dérivée de f*, par rapport à la variable* y *et au point* (x_0, y_0)*, le nombre s'il existe :*

$$f'_y(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{k \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}$$

Si en tout point d'un domaine D il existe des dérivées partielles, les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}$: $(x, y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$: $(x, y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ sont appelées dérivées partielles premières de f, par rapport à x et par rapport à y.

On généralise aisément cette définition à une fonction de n variables.
On remarque que la dérivée partielle par rapport à x, au point (x_0, y_0), n'est autre que la dérivée, au point x_0, de la fonction $\phi : x \mapsto f(x, y_0)$. Pour la dérivée partielle par rapport à y, il s'agit de la dérivée, au point y_0, de la fonction $\psi : y \mapsto f(x_0, y)$.
On en déduit la règle pratique : pour déterminer une dérivée partielle, il suffit de dériver comme on en a l'habitude par rapport à la variable considérée, les autres variables étant considérées comme des constantes.

Exemple 6.12 *La fonction $f : (x, y) \mapsto 5x^2 - xy + 2y^2$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^2$. Sur $\mathbb{R}^2$, elle admet pour dérivées partielles :*

$$\frac{\partial f}{\partial x} : (x, y) \mapsto 10x - y \quad \textit{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} : (x, y) \mapsto -x + 4y$$

Exemple 6.13 *La fonction $f : (x, y) \mapsto x^2 \sin y$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^2$. Sur $\mathbb{R}^2$, elle admet pour dérivées partielles :*

$$\frac{\partial f}{\partial x} : (x, y) \mapsto 2x \sin y \quad \textit{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} : (x, y) \mapsto x^2 \cos y$$

3.1 Dérivées partielles secondes

Les fonctions dérivées partielles premières, d'une fonction f de plusieurs variables, peuvent elles-mêmes admettre des dérivées partielles ; on les appelle dérivées partielles secondes de f.
On peut évidemment envisager également des dérivées partielles d'ordre supérieur.
Pour une fonction de deux variables $f : (x, y) \mapsto f(x, y)$, il faut a priori envisager quatre dérivées partielles secondes :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{x^2} \quad , \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{xy}$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f''_{yx} \quad , \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_{y^2}$$

Exemple 6.14 *La fonction $f : (x, y) \mapsto 5x^2 - xy + 2y^2$admet, sur $\mathbb{R}^2$, les dérivées partielles secondes :*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) \mapsto 10 \quad ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \mapsto -1$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) \mapsto -1 \quad ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \mapsto 4$$

Exemple 6.15 *La fonction $f : (x, y) \mapsto x^2 \sin y$ admet, sur $\mathbb{R}^2$, les dérivées partielles secondes :*

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) \mapsto 2\sin y & ; & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \mapsto 2x\cos y \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) \mapsto 2x\cos y & ; & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \mapsto -x^2 \sin y \end{array}$$

On remarque, sur ces deux exemples que l'on a : $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

Théorème 6.5 *Si, dans le voisinage du point (x_0, y_0), la fonction $f : (x, y) \mapsto f(x, y)$ admet des dérivées partielles premières continues et si les dérivées partielles secondes f''_{xy} et f''_{yx} existent et sont continues, on a :*

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$$

On admettra ce théorème qui se généralise aisément et permet de considérer les dérivations successives par rapport aux variables dans un ordre quelconque.
Sous réserve de la continuité des dérivées partielles, la fonction $f : (x, y) \mapsto f(x, y)$ n'admet que trois dérivées partielles secondes $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ et quatre dérivées partielles troisièmes : $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}$, $\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}$, $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}$ et $\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}$

Exemple 6.16 *Reprenons la fonction $f : (x, y) \mapsto x^2 \sin y$. On peut facilement vérifier l'égalité des dérivées partielles :*

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial y} & : & (x,y) \mapsto -2x\sin y \\ \dfrac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y} & : & (x,y) \mapsto -2x\sin y \\ \dfrac{\partial^3 f}{\partial y \partial y \partial x} & : & (x,y) \mapsto -2x\sin y \end{array}$$

On note que $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} : (x, y) \mapsto -2x \sin y$.

Théorème 6.6 *Soient les fonctions $u : x \mapsto u(x)$ et $v : x \mapsto v(x)$ dérivables en x_0 ; on pose $u_0 = u(x_0)$ et $v_0 = v(x_0)$. Soit la fonction $\phi : (u, v) \mapsto \phi(u, v)$ admettant au voisinage du point (u_0, v_0) des dérivées partielles premières continues en (u_0, v_0). La fonction composée $F : x \mapsto \phi[u(x), v(x)]$ admet pour dérivée en x_0 :*

$$F' : \phi'_u [u(x_0), v(x_0)]\, u'(x_0) + \phi'_v [u(x_0), v(x_0)]\, v'(x_0)$$

On considère les valeurs x_0 et $x_0 + \Delta x$ de la variable x. À l'accroissement Δx de la variable correspondent les accroissements :

$$\begin{array}{rcl} \Delta u & = & u(x_0 + \Delta x) - u(x_0) \\ \Delta v & = & v(x_0 + \Delta x) - v(x_0) \\ \Delta F & = & F(x_0 + \Delta x) - F(x_0) \end{array}$$

On a

$$\begin{aligned} F(x_0+\Delta x)-F(x_0) &= \phi\left[u(x_0+\Delta x), v(x_0+\Delta x)\right]-\phi\left[u(x_0), v(x_0)\right] \\ &= \phi\left(u_0+\Delta u, v_0+\Delta v\right)-\phi(u_0, v_0) \end{aligned}$$

On peut écrire :

$$F(x_0+\Delta x)-F(x_0)=\phi\left(u_0+\Delta u, v_0+\Delta v\right)-\phi(u_0, v_0+\Delta v)+\phi(u_0, v_0+\Delta v)-\phi(u_0, v_0)$$

On applique le théorème des accroissements finis à la fonction : $u \mapsto \phi(u, v_0+\Delta v)$, qui est dérivable :

$$\phi\left(u_0+\Delta u, v_0+\Delta v\right)-\phi(u_0, v_0+\Delta v)=\Delta u \phi_u'\left(u_0+\theta_1 \Delta u, v_0+\Delta v\right) \quad 0<\theta_1<1$$

On applique le théorème des accroissements finis à la fonction : $v \mapsto \phi(u_0+\Delta u, v)$, qui est dérivable :

$$\phi\left(u_0, v_0+\Delta v\right)-\phi(u_0, v_0)=\Delta v \phi_v'\left(u_0, v_0+\theta_2 \Delta v\right) \quad 0<\theta_2<1$$

Il en résulte :

$$F(x_0+\Delta x)-F(x_0)=\Delta u \phi_u'\left(u_0+\theta_1 \Delta u, v_0+\Delta v\right)+\Delta v \phi_v'\left(u_0, v_0+\theta_2 \Delta v\right)$$

Et donc :

$$\frac{F(x_0+\Delta x)-F(x_0)}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\Delta x} \phi_u'\left(u_0+\theta_1 \Delta u, v_0+\Delta v\right)+\frac{\Delta v}{\Delta x} \phi_v'\left(u_0, v_0+\theta_2 \Delta v\right)$$

Lorsqu'on fait tendre Δx vers zéro, étant données la dérivabilité de u et v et la continuité de ϕ_u' et ϕ_v', on obtient comme limite du second membre : $u'(x_0)\phi_u'(u_0, v_0)+v'(x_0)\phi_v'(u_0, v_0)$. Il en résulte que F est dérivable en x_0 et que :

$$F'(x_0)=u'(x_0)\phi_u'(u_0, v_0)+v'(x_0)\phi_v'(u_0, v_0)$$

Lorsque u et v sont dérivables sur un intervalle $[a, b]$ et ϕ_u' et ϕ_v' sont continues sur le domaine correspondant à $[a, b]$ on obtiendra comme fonction dérivée de F :

$$F'=u'\phi_u'+v'\phi_v'$$

Exemple 6.17 *Soit* $F: x \mapsto \frac{u(x)}{v(x)}$.
On obtient : $F'=\frac{1}{v}u'-\frac{u}{v^2}v'=\frac{vu'-uv'}{v^2}$

Exemple 6.18 *Soit* $F: x \mapsto \log[u(x)v(x)]$.
On obtient : $F'=\frac{1}{u}u'+\frac{1}{v}v'=\frac{u'}{u}+\frac{v'}{v}$

Exemple 6.19 *Soit* $F: x \mapsto u(x)v(x)$.
On obtient : $F'=vu'+uv'$

Quelques remarques :

1. Le théorème 6.6 se généralise aisément au cas où ϕ est une fonction de n variables. si, par exemple, on a $F[u(x), v(x), w(x)]$, on obtient :

$$F' = u'\phi'_u + v'\phi'_v + w'\phi'_w$$

c'est-à-dire que l'on a :

$$F'(x) = u'(x)\phi'_u[u(x), v(x), w(x)] + v'(x)\phi'_v[u(x), v(x), w(x)] + w'(x)\phi'_w[u(x), v(x), w(x)]$$

2. Si on considère la composition de fonctions de plusieurs variables par une autre fonction, le théorème 6.6 s'applique également aux dérivées partielles, sous réserve des conditions de validité.
Soit par exemple $F : (x, y) \mapsto \phi[u(x, y), v(x, y)]$, on aura :

$$F : \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} &= \phi'_u \frac{\partial u}{\partial x} + \phi'_v \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= \phi'_u \frac{\partial u}{\partial y} + \phi'_v \frac{\partial u}{\partial y} \end{cases}$$

si les fonctions u et v admettent des dérivées partielles en (x, y) et si ϕ admet des dérivées partielles au voisinage de $(u(x, y), v(x, y))$ continues en ce point.

Exemple 6.20 *La fonction $F : x \mapsto \frac{\cos^2 x e^{x^2}}{x^2}$ admet pour dérivées, sur $\mathbb{R}^*$:*

$$F' : x \mapsto \frac{e^{x^2}}{x^2}(-2\cos x \sin x) + \frac{\cos^2 x}{x^2}\left(2xe^{x^2}\right) - \frac{\cos^2 x e^{x^2}}{x^4} 2x$$

Exemple 6.21 *La fonction $F : (x, y) \mapsto \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ admet pour dérivées partielles, sur $\mathbb{R}^*$:*

$$F : \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) \mapsto \frac{1}{x^2+y^2} 2x - \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} 2x &= \frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \mapsto \frac{1}{x^2+y^2}(-2y) - \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} 2y &= \frac{-4x^2y}{(x^2+y^2)^2} \end{cases}$$

4 Exercices

1. Déterminer les domaines de définition des fonctions f et g définies par :
   - $f(x,y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$
   - $g(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}$ si $x^2 - y^2 \neq 0$, et $g(0,0) = 0$
2. On désigne par :
   - f la fonction à valeurs réelles définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

   $$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{y} & \text{si } 0 \leq x < y \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

   - g la fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$ par :

   $$g(y) = \begin{cases} ye^{-y} & \text{si } y \geq 0 \\ 0 & \text{si } y < 0 \end{cases}$$

   - h la fonction réelle définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

   $$h(x,y) = g(y)f(x,y)$$

   (a) Définir D l'ensemble de $\mathbb{R}^2$ sur lequel la fonction h prend des valeurs non nulles et donner une représentation géométrique de cet ensemble.

   (b) Calculer l'intégrale $f(x) = \int_0^{+\infty} h(x,y)\mathrm{d}y$. (on prendra soin d'utiliser la question précédente).

   (c) Donner, en fonction de x et y, l'expression explicite de :

   $$h(x,y) = \begin{cases} \frac{h(x,y)}{f(x)} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

   Pour quelles valeurs des variables x et y cette quantité est-elle non nulle ?

   (d) Calculer l'intégrale suivante dépendant du paramètre a :

   $$Q(a,x) = \int_0^{+\infty} (y-a)^2 h(x,y)\mathrm{d}y$$

   (e) Donner en fonction de x la valeur a_0 du paramètre a qui rend minimum l'intégrale $Q(a,x)$.

3. Déterminer et représenter graphiquement le domaine de définition des fonctions f et g définies par :
   - $f(x,y) = \log[(16x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - 4)]$
   - $g(x,y) = \sqrt{6 - (2x + 3y)}$
4. Déterminer si les fonction suivantes ont une limite $(x,y) \mapsto (0,0)$:
   - $f : (x,y) \mapsto \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$
   - $g : (x,y) \mapsto \frac{|x+y|}{x^2+y^2}$

- $h : (x, y) \mapsto \frac{x^3y^3}{x^2+y^2}$

  Ces fonctions, complétées par : $(0, 0) \mapsto 0$, sont-elles continues à l'origine ?

5. Peut-on rendre continues à l'origine, en les définissant en ce point, les fonctions définies par :
   - $f(x, y) = \frac{\sin(x+y)}{x+y}$
   - $g(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$
6. Déterminer et représenter graphiquement le domaine de définition de la fonction :

$$f : (x, y) \mapsto \frac{\sin x - \sin y}{x - y}$$

   Trouver une fonction g qui prenne la même valeur que f partout où celle-ci est définie et qui soit continue dans tout le plan.
7. Montrer que la fonction $(x, y) \mapsto \frac{x+y}{x^2+y^2}$ admet une limite lorsque le point $M(x, y)$ s'éloigne à l'infini.
8. La fonction f, définie par $f(x, y) = e^{x-y}$ a-t-elle une limite lorsque le point $M(x, y)$ s'éloigne à l'infini.
9. Soit la fonction f :

$$f : \begin{cases} (x, y) \mapsto x^2 + 2y & , \text{ si } (x, y) \neq (1, 2) \\ (x, y) \mapsto 0 & , \text{ si } (x, y) = (1, 2) \end{cases}$$

   Cette fonction est-elle continue au point $(1, 2)$?
10. Calculer les dérivées partielles des fonction suivantes :
    - $f_1(x, y) \mapsto 2x^2 - 3xy + 4y^2$
    - $f_2(x, y) \mapsto \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x}$
    - $f_3(x, y) \mapsto \sin(2x - 3y)$
    - $f_4(x, y) \mapsto e^{x^2+xy}$
11. Calculer les dérivées partielles secondes des fonction suivantes :
    - $f_1(x, y) \mapsto x^2 + 3xy + y^2$
    - $f_2(x, y) \mapsto x \cos y - y \cos x$
    - $f_3(x, y) \mapsto xy$
    - $f_4(x, y) \mapsto \log(xy)$
    - $f_5(x, y) \mapsto \arctan \frac{y}{x}$
    - $f_6(x, y) \mapsto \log \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$
12. On considère la fonction f :

$$f : \begin{cases} (x, y) \mapsto \frac{2xy}{x^2+y^2} & , \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \\ (x, y) \mapsto 0 & , \text{ si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

    Montrer que les dérivées partielles $f'_x(0, 0)$ et $f'_y(0, 0)$ existent. La fonction est-elle continue au point $(0, 0)$?

13. Montrer que la fonction définie par $U(x,y,z) = (x^2+y^2+y^2)^{-1/2}$ vérifie l'équation aux dérivées partielles de Laplace :
$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0$$
14. Soit la fonction $f : (x,y,z) \mapsto e^{-x/y} + e^{-y/z} + e^{-z/x}$. Déterminer le domaine de définition de D de f ; la fonction est-elle continue en D ? Calculer les dérivées partielles, premières et secondes, de f.
15. Soit la fonction $f : (x,y) \mapsto x^2 + y^2$. Calculer, en appliquant le théorème 6.6, la dérivée de $F : t \mapsto f(a\cos t, b\sin t)$.
16. Soit la fonction $F : r \mapsto F(r)$. On pose $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, ce qui permet de définir la fonction $f : (x,y,z) \mapsto f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})$. Calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$.
Déterminer F pour que l'on ait : $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$.

Annexe A

Intégrales multiples

1 Intégrale double

1.1 Notion d'intégrale double

Soit une fonction $f : (x, y) \mapsto z = f(x, y)$, définie sur un domaine D fermé et supposée nulle à l'extérieur de D.
L'espace étant muni d'un repère orthormé direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, lorsque le point $H(x, y)$ se déplace dans D, le point $M(x, y, z)$ décrit une surface S.
On désigne par a et b les bornes inférieures et supérieures des abcisses d'un point de contour de D et par c et d les bornes inférieures et supérieures des ordonnées d'un point de ce même contour.
On partage $[a, b]$ par les valeurs $x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_i < \ldots < x_m = b$
et $[c, d]$ par les valeurs $y_0 = c < y_1 < y_2 < \ldots < y_j < \ldots < y_m = d$
ce qui permet de définir un ensemble de mn rectangles recouvrant D.
Soit E_{ij} le rectangle $[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$, de dimensions $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ et $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$.
On choisit arbitrairement dans E_{ij} un point H_{ij}.
On considère la somme $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(H_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j$.
Si cette somme tend vers une limite I, lorsque m et n tendent vers l'infini de manière à ce que $\sup \Delta x_i$ et $\sup \Delta y_j$ tendent vers zéro, indépendamment de la façon dont on fait les partages et dont on choisit les points H_{ij}, on dit que f est intégrable sur D, que I est l'intégrale de f sur d et on pose :

$$I = \int\int_D f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

On peut démontrer en particulier que si f est continue sur D, l'intégrale existe toujours.

1.2 Calcul d'une intégrale double

Le calcul d'une intégrale double se ramène au calcul de deux intégrales définies.

Limitons-nous, dans un premier temps, au cas où les parallèles aux axes qui coupent le contour de domaine D ont en commun avec D un segment.
On peut choisir des points H_{ij} d'abcisse ξ_i, constante pour tous les rectangles d'une rangée parallèle à Oy et d'ordonnée η_j, constante pour tous les rectangles d'une rangée parallèle à Ox.
On obtient alors la somme double :

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(\xi_i,\eta_j)\Delta x_i \Delta y_j$$

que l'on peut écrire :
$\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \left(\sum_{j=1}^{m} f(\xi_i,\eta_j)\Delta y_j\right)$
Or lorsque $n \to +\infty$ avec $\sup \Delta y_j \to 0$, il est clair que :

$$\lim \sum_{j=1}^{m} f(\xi_i,\eta_j)\Delta y_j = \int_{\phi_1(\xi_i)}^{\phi_2(\xi_i)} f(\xi_i,y)\mathrm{d}y = F(\xi_i)$$

et lorsque $n \to +\infty$ avec $\sup \Delta x_i \to 0$, on obtient :

$$\lim \sum_{j=1}^{n} F(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b F(x)\mathrm{d}x$$

Finalement :

$$\int\int_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{\phi_1(\xi_i)}^{\phi_2(\xi_i)} f(x,y)\mathrm{d}y$$

Cette écriture signifie que, x étant fixé, on intègre d'abord par rapport à y ; la fonction ϕ_2 admet pour graphe la partie supérieure du contour de D, la fonction ϕ_1 la partie inférieure. On obtient alors une fonction de x qu'il reste à intégrer de a à b.
En inversant l'ordre de la mise en facteurs, on obtiendrait également :

$$\int\int_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_c^d \mathrm{d}y \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x$$

Exemple A.1 *$\int\int_D (x+y^2)dxdy$ où D est défini par $\{x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1\}$. Il est facile de représenter le domaine (premier quadrant en dessous de la droite $y = 1-x$)*
• *Premier calcul :*

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x+y^2)dy = \int_0^1 dx \left[xy + \frac{y^3}{3}\right]_0^{1-x} \\ &= \int_0^1 \frac{1}{3}(1-x^3)dx = \frac{1}{3}\left[x - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

- *Deuxième calcul :*

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 dy \int_0^{1-y} (x+y^2)dx = \int_0^1 dy \left[\frac{x^2}{2} + xy^2\right]_0^{1-y} \\
&= \int_0^1 \left(-y^3 + \frac{3}{2}y^2 - y + \frac{1}{2}\right) dy \\
&= \left[-\frac{y^4}{4} + \frac{y^3}{2} - \frac{y^2}{2} + \frac{y}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

1.3 *Propriétés*

1. L'intégrale double se calculant par deux intégrales simples successives, il résulte de la linéarité d'une intégrale définie que l'intégrale double est une expression linéaire de la fonction à intégrer, lorsque le domaine d'intégration est fixé :

$$\begin{aligned}
\int\int_D [g(x,y) + h(x,y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int\int_D g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int\int_D h(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
\int\int_D \lambda f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \lambda \int\int_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad , \ \lambda \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

2. On peut montrer également que si le domaine D est la réunion de deux domaines disjoints D_1 et D_2, on a :

$$\int\int_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\int_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int\int_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Cette propriété permet d'étendre la notion d'intégrale double à des domaines de forme générale.

1.4 *Cas particuliers*

1. Le domaine d'intégration est un rectangle.
On a alors :

$$\int\int_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}x \int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y$$

Les bornes de la première intégrale ne sont pas fonction de x.

2. Le domaine d'intégration est un rectangle et $f(x,y) = g(x)f(y)$.
Dans ce cas :

$$\begin{aligned}
\int\int_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_a^b \mathrm{d}x \int_c^d g(x)f(y)\mathrm{d}y \\
&= \left[\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\right]\left[\int_c^d f(y)\mathrm{d}y\right]
\end{aligned}$$

L'intégrale double est alors le produit de deux intégrales simples.

Exemple A.2 *$\int\int_D xydxdy$ où D est défini par : $0 \leq x \leq 1$ et $0 \leq y \leq 2$.*
On a : $I = \int_0^1 xdx \int_0^2 ydy = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^2 = 1$

1.5 *Calcul de volumes et de surfaces*

Si $f(x, y)$ est positif ou nul en tout point du domaine D, le produit $f(H_{ij})\Delta x_i \Delta y_j$ est égal au volume d'un parallélépipède rectangle de surface de base $\Delta x_i \Delta y_j$ et de hauteur $f(H_{ij})$. En sommant sur i et sur j, on obtient un volume qui, à la limite, est égal au volume V de la portion de cylindre, de génératrices parallèles à Oz, limité par la base D et par la surface S. On posera donc :

$$V = \int\int_D f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Par contre, si $f(x, y)$ n'est pas forcément positif ou nul, on parlera de volume algébrique. Les portions situées en dessous du plan xOy étant comptées négativement (voir propriété 2).
Si on considère maintenant la fonction $f : (x, y) \mapsto 1$, définie sur un domaine D, il est clair que l'intégrale $\int\int_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ donne le volume d'un cylindre de base D et de hauteur 1. Le nombre obtenu est donc également l'aire de la surface D. On posera donc :

$$S = \int\int_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Exemple A.3 *(Volume d'une sphère). Une sphère de centre O et de rayon R admet pour équation, par rapport à un repère orthonormé d'origine O : $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$*
La demi-sphère S située au-dessus du plan xOy a pour équation :

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \text{ et } z \geq 0 \Leftrightarrow z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

C'est donc le graphe de la fonction $f : (x, y) \mapsto \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ définie sur le domaine $D : x^2 + y^2 \leq R^2$.
Le volume limité par la demi-sphère S et le plan xOy est donc :

$$\begin{aligned}
I &= \int\int_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}dxdy \\
&= \int_{-R}^{R} dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}dy \text{ sur } D \text{, pour } x \text{ fixé, } -\sqrt{R^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{R^2 - x^2} \\
&= \int_{-R}^{R} dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \sqrt{R^2 - x^2}\sqrt{1 - \frac{y^2}{R^2 - x^2}}dy
\end{aligned}$$

On pose :

$$\begin{aligned}
t = \arcsin \frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2}} &\Leftrightarrow \frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2}} = \sin t \text{ et } -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2} \\
&\Rightarrow dy = \sqrt{R^2 - x^2}\cos t dt \\
&\quad \sqrt{1 - \sin^2 t} = |\cos t| = \cos t \ (\geq 0 \text{ si } -\tfrac{\pi}{2} \leq t \leq \tfrac{\pi}{2})
\end{aligned}$$

Finalement :

$$I = \int_{-R}^{R} (R^2 - x^2) dx \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \int_{-R}^{R} (R^2 - x^2) dx \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \left[R^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_{-R}^{R} = \frac{2}{3} \pi R^3$$

D'où le volume de la sphère

$$V = 2I = \frac{4}{3} \pi R^3$$

Exemple A.4 *(Aire du cercle) Soit un cercle de centre O et de rayon R. On a :*

$$\begin{aligned} S = \int \int_D dx dy &= \int_{-R}^{R} dx \int_{-\sqrt{R^2 - x^2}}^{\sqrt{R^2 - x^2}} dy \\ &= 2 \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2} dx \\ &= 2R \int_{-R}^{R} \sqrt{1 - \frac{x^2}{R^2}} dx \end{aligned}$$

On pose

$$\begin{aligned} u = \arcsin \frac{x}{R} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{x}{R} = \sin u \text{ et } -\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{\pi}{2} \\ &\Rightarrow \quad dx = R \cos u du \\ &\quad\quad \sqrt{1 - \sin^2 u} = |\cos u| = \cos u \end{aligned}$$

On obtient

$$S = 2R^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u du = 2R^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2u}{2} du = 2R^2 \left[\frac{u}{2} + \frac{\sin 2u}{4} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2R^2 \frac{\pi}{2} = \pi R^2$$

1.6 *Changement de variables*

Soit l'intégrale double $\int \int_D f(x, y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y$.
Pour faciliter les calculs, il est souvent commode de changer de variables. Sans aller jusqu'à la justification, relativement compliquée, du procédé, il convient cependant d'en connaître les règles.
Le changement de variables, dans un intégrale double, consiste à passer d'un couple (x, y) à un autre couple (u, v) par l'intermédiaire d'une application $(x, y) \mapsto (u, v)$. Lorsque le point $H(x, y)$ décrit le domaine D, son image $K(u, v)$ va décrire un nouveau domaine Δ.
L'application doit donc être bijective.
Considérons maintenant les fonctions ϕ et ψ définies par : $x = \phi(u, v)$ et $y = \psi(u, v)$, les formules de changement de variables.
On appelle déterminant fonctionnel ou Jacobien des fonctions ϕ et ψ le déterminant :

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} = x'_u y'_v - x'_v y'_u$$

Sous réserve de la continuité des fonctions ϕ et ψ et de leurs dérivées partielles sur Δ, on a :

$$\int\int_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\int_\Delta f\left(\phi(u,v),\psi(u,v)\right)\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

Application : utilisation des coordonnées polaires

À tout point M du plan muni du repère orthonormé $(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k})$, on associe ses coordonnées cartésiennes x et y qui sont telles que : $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$.
On peut également lui associer ses coordonnées polaires r et θ : si $\overrightarrow{u}$ est le vecteur unitaire parallèle et de même sens que $\overrightarrow{OM}$, on a :

$$\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{u}\ (r \geq 0)\ ,\ \theta = (\widehat{\overrightarrow{i},\overrightarrow{u}})(0 \leq \theta < 2\pi)$$

Dans ces conditions, il est clair que se donner (x,y), c'est se donner (r,θ) et réciproquement ; l'application $(x,y)\mapsto(r,\theta)$ est bijective.
On a : $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$

$$\frac{D(x,y)}{D(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r$$

$$r \geq 0 \Rightarrow \left|\frac{D(x,y)}{D(r,\theta)}\right| = r$$

et on peut écrire :

$$\int\int_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\int_\Delta f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

Exemple A.5 *On avait à calculer :* $I = \int\int_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}dxdy$
On passe en coordonnées polaires. On obtient :
$\int\int_\Delta \sqrt{R^2-r^2}rdrd\theta$ *où* Δ *est défini par :* $0 \leq r \leq R$, $0 \leq \theta < 2\pi$.
D'où

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \sqrt{R^2-r^2}rdr \qquad \textit{cas particulier 2 du paragraphe 1.4} \\ &= 2\pi\left[-\frac{1}{3}(R^2-r^2)^{3/2}\right]_0^R = \frac{2}{3}\pi R^3 \end{aligned}$$

et donc

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Exemple A.6 $\int\int_D x^2+y^2dxdy$ *où* D *est défini par* $x \geq 0$, $y \geq 0$ *et* $x^2+y^2 \leq 2$.
Dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k})$, *le domaine* D *est représenté par le quart de cercle, de centre* O *et de rayon* $\sqrt{2}$, *situé dans le premier quadrant. On passe en coordonnées polaires et on obtient :*
$I = \int\int_\Delta r^3drd\theta$ *où* Δ *est défini par :* $0 \leq r \leq \sqrt{2}$, $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$.
D'où

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} r^3dr = [\theta]_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2}$$

2 Intégrale triple

2.1 *Notion d'intégrale triple*

Soit une fonction $f : (x, y, z) \mapsto t = f(x, y, z)$, définie sur un domaine D fermé et supposée nulle à l'extérieur de D.
L'espace étant muni d'un repère orthormé direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, D peut être représenté par l'ensemble des points d'un volume limité par une surface fermée S.
On désigne par a et b, c et d, e et f les bornes inférieures et supérieures des abcisses, des ordonnées et des côtes des point de S.
On partage $[a, b]$ par les valeurs $x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_i < \ldots < x_m = b$
$[c, d]$ par les valeurs $y_0 = c < y_1 < y_2 < \ldots < y_j < \ldots < y_m = d$
et $[e, f]$ par les valeurs $z_0 = e < z_1 < z_2 < \ldots < z_k < \ldots < z_p = f$
et on quadrille l'espace par des plans d'abcisses $x_0, x_1, \ldots, x_m$ des plans d'ordonnée $y_0, y_1, \ldots, y_n$ et des plans de côte $z_0, z_1, \ldots, z_p$, ce qui permet de définir un ensemble de mnp parallélépipèdes rectangles recouvrant D.
On désigne par E_{ijk} le parallélépipède rectangle

$$[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, y_k]$$

de dimensions $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$ et $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$.
On choisit arbitrairement dans chaque parallélépipède E_{ijk} un point M_{ijk}.
Soit maintenant la somme :

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} f(M_{ijk}) \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$$

Si cette somme tend vers une limite I, lorsque m, n et p tendent vers l'infini de manière à ce que $\sup \Delta x_i$, $\sup \Delta y_j$ et $\sup \Delta z_k$ tendent vers zéro, indépendamment de la façon dont on fait les partages et du point M_{ijk}, on dit que f est intégrable sur D, que I est l'intégrale triple de f sur D et on pose :

$$\int\int\int_D f(x, y, z) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z$$

On peut démontrer, en particulier, que, si f est continue sur D, l'intégrale existe.

2.2 *Calcul d'une intégrale triple*

Le calcul d'une intégrale triple se ramène au calcul d'une intégrale double et d'une intégrale simple donc, finalement, au calcul de trois intégrales simples successives.
On peut choisir $M_{ijk} = (\xi_i, \eta_j, \zeta_k)$; ceci revient à choisir même abcisse pour tous les points de premier indice i, même ordonnée pour tous les points de deuxième indice j et même côte pour tous les points de troisième indice k. On peut alors écrire la somme triple :

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} f(\xi_i, \eta_j, \zeta_k) \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k = \sum_{k=1}^{p} \Delta z_k \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(\xi_i, \eta_j, \zeta_k) \Delta x_i \Delta y_j$$

À la limite, la somme double est l'intégrale double de $f(x, y, \zeta_k)$ par rapport à x et y, ζ_k étant fixé, sur un domaine $D(\zeta_k)$ obtenu par l'intersection de D par le plan de côté $z = \zeta_k$.
Cette intégrale double est évidemment fonction de ζ_k. Il ne reste plus qu'à sommer sur k ce qui, à la limite est une intégrale simple sur z. On écrira donc successivement :

$$\begin{aligned}
\int\int\int_D f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \int_e^f \mathrm{d}z \int\int_{D(z)} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
\int\int\int_D f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \int_e^f \mathrm{d}z \int_{\phi_1(z)}^{\phi_2(z)} \mathrm{d}y \int_{\psi_1(y,z)}^{\psi_2(y,z)} f(x,y,z)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Cette notation signifie que x et y étant fixées, on intègre d'abord par rapport à x ; les bornes de cette première intégrale dépendant en général de (y, z). On intègre ensuite par rapport à y, z étant fixé ; les bornes de cette deuxième intégrale dépendant en général de z. Enfin on intègre par rapport à z.
Bien entendu l'ordre d'intégration choisi ici est arbitraire ; on pourrait commencer à intégrer d'abord par rapport à z, x et y étant fixés, puis par rapport à x, y étant fixé, enfin par rapport à y.

Exemple A.7 *$\int\int\int_D xyzdxdydz$ où D est défini par : $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$ ($a > 0$, $b > 0$, $c > 0$).*
Le domaine D peut ici être représenté par un huitième d'ellipsoïde. On a

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^a xdx \int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} ydy \int_0^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} zdz \\
&= \int_0^a xdx \int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} ydy \left[\frac{c^2}{2}\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)\right] \\
&= \frac{c^2}{2}\int_0^a xdx \left[\frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{a^2}\frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{4b^2}\right]_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} \\
&= \frac{c^2}{2}\frac{b^2}{2}\int_0^a \left[\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)x - \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)\frac{x^3}{a^2} - \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^2 \frac{x}{2}\right] dx \\
&= \frac{b^2c^2}{2}\left(\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{6} - \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{12}\right) \\
&= \frac{a^2b^2c^2}{48}
\end{aligned}$$

Le produit $\Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$ est égal au volume du parallélépipède rectangle E_{ijk}.
Soit maintenant la fonction :

$$g : \begin{cases} (x,y,z) \mapsto 1 \text{ sur } D \\ (x,y,z) \mapsto 0 \text{ ailleurs} \end{cases}$$

Il est clair qu'en multipliant $\Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$ par $g(M_{ijk})$ et en sommant sur i, j et k, on obtient un volume qui, à la limite, est égal au volume de la portion de l'espace représentant D.

2.3 Changement de variables

Soient les formules de changement de variables :

$$x = \phi(u, v, w) \text{ , } y = \psi(u, v, w) \text{ et } z = \chi(u, v, w)$$

définissant une correspondance bijective entre l'ensemble D des points (x, y, z) et l'ensemble Δ des points (u, v, w). On admettra que, sous réserve de la continuité des fonctions ϕ, ψ et χ et de leurs dérivées partielles :

$$\int\int\int_D f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int\int\int_\Delta f\left(\phi(u,v,w), \psi(u,v,w), \chi(u,v,w)\right) \left|\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}\right| \mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w$$

où $\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}$ est le Jacobien des fonctions ϕ, ψ et χ défini par le déterminant :

$$\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v & x'_w \\ y'_u & y'_v & y'_w \\ z'_u & z'_v & z'_w \end{vmatrix}$$

2.4 Généralisation

On peut envisager des intégrales n-uples de fonctions de n variables. Le support géométrique fera évidemment totalement défaut dès que $n > 3$, ce qui n'est pas nécessairement gênant.
En fait le processus de calcul sera le même que pour les intégrales doubles et triples.

3 Rappels de mécanique

L'espace est muni d'un repère orthonormé $Oxyz$
Pour un ensemble de points isolés $A_i(x_i, y_i, z_i)$ affectés d'une masse m_i, de masse totale $M = \sum_i m_i$, on définit :

le centre de masse $G(X, Y, Z)$ par la relation vectorielle $\sum_i m_i\overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{O}$. On en déduit $M\overrightarrow{OG} = \sum_i m_i\overrightarrow{OA_i}$, d'où les coordonnées de G :

$$X = \frac{1}{M}\sum_i m_i x_i \text{ , } Y = \frac{1}{M}\sum_i m_i y_i \text{ , } X = \frac{1}{M}\sum_i m_i z_i$$

le moment d'inertie par rapport à un point, à un axe, ou à un plan :

$$I = \sum_i m_i d_i^2$$

où d_i est la distance du point A_i au point, à l'axe, ou au plan par rapport auquel le moment d'inertie est calculé.

Pour une tige porté par l'axe Ox, de masse spécifique (linéaire) $\rho(x)$, (a, b) étant l'ensemble des abcisses des points de la tige, on obtient :

$$M = \int_a^b \rho(x)\mathrm{d}x \text{ , } X = \frac{1}{M}\int_a^b x\rho(x)\mathrm{d}x \text{ , } (Y = Z = 0)$$

$$I = \int_a^b d^2(x)\rho(x)\mathrm{d}x$$

où $d(x)$ est la distance du point $A(x)$ de la tige, à l'élément par rapport auquel I est calculé.

Pour un plaque plane situé sur le plan xOy, de masse spécifique (superficielle) $\rho(x, y)$, D étant l'ensemble des couples (x, y) associés aux points de la plaque, on obtient :

$$\begin{aligned} M &= \int\int_D \rho(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ X &= \frac{1}{M}\int\int_D x\rho(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ Y &= \frac{1}{M}\int\int_D y\rho(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \text{ , } (Z = 0) \end{aligned}$$

$$I = \int\int_D d^2(x,y)\rho(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

où $d(x, y)$ est la distance du point $A(x, y)$ de la plaque, à l'élément par rapport auquel I est calculé.

Pour un solide, à 3 dimensions, de masse spécifique $\rho(x, y, z)$, Δ étant l'ensemble des triplets (x, y, z) définissant les points du solide, on a :

$$M = \int\int\int_\Delta \rho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \text{ , } X = \frac{1}{M}\int\int_D x\rho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$Y = \frac{1}{M}\int\int_D y\rho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \text{ , } Z = \frac{1}{M}\int\int_D z\rho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$I = \int\int_D d^2(x,y,z)\rho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

où $d(x, y, z)$ est la distance du point $A(x, y, z)$ du solide, à l'élément par rapport auquel I est calculé.
Si le solide est homogène, la masse spécifique est constante.

4 Exercices

1. Calculer $\int\int_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, où D est défini par $\{x \geq 0, y \geq 0, y \leq 1-2x\}$
2. Calculer, par deux méthodes différentes : $\int\int_{D_1} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, où D_1 est défini par $\{x \geq 0, y \geq 0, x^2+y^2 \leq R^2\}$ Calculer $\int\int_{D_2} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, où D_2 est défini par $\{x \geq 0, y \geq 0, x^2+y^2 \leq R^2, x+y \geq R > 0\}$
3. Calculer $\int\int_D x\sin(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, où D est défini par $\{0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}\}$
4. Calculer $\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2+y^2+a^2)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$
5. Calculer l'aire plane limitée par les courbes d'équations, dans un repère orthonormé $y = x^2$ et $y = 2-x^2$
6. L'espace est muni d'un repère orthonormé $Oxyz$. Calculer le moment d'inertie, par rapport à l'axe Oz, d'une plaque homogène situé dans le plan xOy et limitée par les courbes d'équations : $y^2 = 4x$, $x = 0$, $y = 2$.
7. Déterminer le centre de masse d'une plaque semi-circulaire homogène, de centre O et de rayon R.
8. Calculer $\int\int_D \frac{1}{(x+y)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ où D est défini par $\{x \geq 1, y \geq 1, x+y \leq 3\}$
9. Calculer $\int\int_D \frac{xy}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ où D est le triangle de sommets : $O(0,0)$, $A(a,a)$, $B(a,0)$ avec $a > 0$, les trois points étant repérés par rapport à un système orthonormé xOy.
10. Calculer $\int\int_D \frac{1}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ où D est défini par $\{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, x+y \geq 1\}$
11. Calculer $\int\int\int_D z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ où D est défini par $\{x^2+y^2+z^2 \leq R^2\}$
12. Calculer $\int\int\int_V z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ où V est défini par $\{x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x+y+z \leq a\}$
13. Calculer $\int\int\int_V z\mathrm{d}(x+y+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ où V est défini par $\{-h \leq z \leq h, x^2+y^2 \leq R^2\}$
14. Calculer le volume, la masse, le moment d'inertie par rapport à son axe de révolution, d'un cône de révolution homogène, de hauteur H et de rayon de base R. Déterminer son centre de masse.
15. Calculer $\int\int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. En déduire $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}\mathrm{d}x$.
16. Calculer la surface d'un cercle de rayon R.
17. Calculer le volume d'une sphère de rayon R.
18. Calculer l'aire plane limitée par les courbes d'équation : $y^2 = 4x$ et $y = 2x-4$, dans un repère orthonormé.
19. Calculer l'aire et déterminer le centre de masse d'une plaque plane homogène limitée par une courbe d'équation polaire :
   (a) $r^2 = a^2\cos 2\theta$ avec $-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$
   (b) $r = a\cos\theta$ avec $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$
20. L'espace est muni d'un repère orthonormé. Calculer le volume et déterminer le centre de masse d'un solide homogène limité par la surface d'équation $x^2+y^2+z = 9$ et le plan $z = 0$.

21. Calculer le volume et déterminer le centre de masse du solide homogène limité par les plans d'équations : $x = 0, y = 0, z = 0, \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$, $(a, b, c \in \mathbb{R}_+^*)$
22. Calculer le moment d'inertie par rapport à une de ses arêtes d'une plaque rectangulaire homogène.

5 Solutions

1. On a :

$$\begin{aligned}
I &= \int\int_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{1/2} x\mathrm{d}x \int_0^{1-2x} y\mathrm{d}y \\
&= \int_0^{1/2} x\mathrm{d}x \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{1-2x} \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{1/2}(x-4x^2+4x^3)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}-\frac{4x^3}{3}+x^4\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{8}-\frac{4}{24}+\frac{1}{16}\right) \\
&= \frac{1}{96}
\end{aligned}$$

2. Soit $I_1 = \int\int_{D_1} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.
   (a) on a

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^R x\mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} y\mathrm{d}y \\
&= \int_0^R x\mathrm{d}x \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \\
&= \frac{1}{2}\int_0^R (R^2x-x^3)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[R^2\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right]_0^R \\
&= \frac{R^4}{8}
\end{aligned}$$

   (b) On peut également écrire, en passant en coordonnées polaires :

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int\int_{\Delta_1} r^2\cos\theta\sin\theta r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \text{ où } \Delta_1 \text{ est défini par } \{0\le\theta\le\tfrac{\pi}{2}, 0\le r\le R\} \\
&= \int_0^{\pi/2}\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^R r^3\mathrm{d}r \\
&= \left[\frac{\sin^2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R \\
&= \frac{R^4}{8}
\end{aligned}$$

Soit maintenant $I_2 = \int\int_{D_2} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. On a :

$$I_2 = \int_0^R x\mathrm{d}x\int_{R-x}^{\sqrt{R^2-x^2}} y\mathrm{d}y$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^R x\mathrm{d}x \left[\frac{y^2}{2}\right]_{R-x}^{\sqrt{R^2-x^2}} \\
&= \frac{1}{2}\int_0^R (R^2-x^2-R^2-x^2+2Rx)x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[R^2\frac{x^3}{3}-\frac{2x^4}{4}\right]_0^R \\
&= \frac{R^4}{12}
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^\pi x\mathrm{d}x \int_0^{\pi/2} \sin(x+y)\mathrm{d}y \\
&= \int_0^\pi x\mathrm{d}x \left[-\cos(x+y)\right]_0^{\pi/2} \\
&= \int_0^\pi x\left(-\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\cos x\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^\pi x(\cos x+\sin x)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

On intègre par parties $\left(\int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u\right)$ en posant $x = u \Rightarrow \mathrm{d}x = \mathrm{d}u$ et $(\cos x+\sin x)\mathrm{d}x = \mathrm{d}v \Rightarrow v = \sin x - \cos x$

$$I = [x(\sin x-\cos x)]_0^\pi - \int_0^\pi (\sin x - \cos x)\mathrm{d}x = \pi - [-\cos x - \sin x]_0^\pi = \pi - 2$$

4. Soit $I = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2+y^2+a^2)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. Le domaine d'intégration peut être représenté dans un plan, muni d'un repère orthonormé, par le premier quadrant.
   On passe en coordonnées polaires :

$$I = \int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta \int_0^{+\infty} \frac{r}{(r^2+a^2)^2}\mathrm{d}r = \frac{\pi}{2}\left[-\frac{1}{r^2+a^2}\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2a^2}$$

5. Dans un plan muni d'un repère orthonormé, l'aire à calculer est limitée par deux paraboles admettant $y'Oy$ pour axe de symétrie et symétriques entre elles par rapport à la droite d'équation $y = 1$. Ces deux paraboles se coupent en $A(-1,1)$ et $B(1,1)$: $y = 2-x^2 = x^2 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$. On a :

$$S\int\int_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-1}^1 \mathrm{d}x \int_{x^2}^{2-x^2}\mathrm{d}y = \int_{-1}^1 (2-2x^2)\mathrm{d}x = \left[2x-2\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^1 = \frac{8}{3}$$

6. La plaque plane est la surface entre l'axe Oy, la droite $y = 2$ et la courbe $y^2 = 4x$. On a, si D est l'ensemble des (x,y) définissant la plaque de masse spécifique ρ :

$$I = \int\int_D \rho(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \rho\int_0^2 \mathrm{d}y \int_0^{y^2/4}(x^2+y^2)\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned}
&= \rho\int_0^2 \mathrm{d}y\left[\frac{x^3}{3}+y^2x\right]_0^{y^2/4} = \rho\int_0^2\left(\frac{y^6}{192}+\frac{y^4}{4}\right)\mathrm{d}y \\
&= \rho\left[\frac{y^7}{1344}+\frac{y^5}{20}\right]_0^2 \\
&= \frac{178}{105}\rho
\end{aligned}$$

Il est d'usage d'exprimer un moment d'inertie en fonction de la masse M du solide. Si S est l'aire de la plaque, on a :

$$M=\int\int_D \rho\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\rho\int\int_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\rho S$$

$$S=\int\int_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^2\mathrm{d}y\int_0^{y^2/4}\mathrm{d}x=\left[\frac{y^3}{12}\right]_0^2=\frac{2}{3}\Rightarrow M=\frac{2}{3}\rho\Rightarrow I=\frac{3}{2}M\frac{178}{105}=\frac{89}{35}M$$

7. On choisit le repère orthonormé Oxy de manière que Oy soit l'axe de symétrie de la plaque. Soient ρ la masse spécifique (constante) de la plaque, M sa masse, D l'ensemble des (x, y) définissant la plaque. Soit $G(x, y)$ le centre de masse cherché. On a :

$$X=\frac{\rho}{M}\int\int_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\rho}{M}\int\int_\Delta r\cos\theta r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

, en passant en coordonnées polaires. Δ est défini par : $\{0 \le \theta \le \pi, 0 \le r \le R\}$

$$X=\frac{\rho}{M}\int_0^\pi\cos\theta\mathrm{d}\theta\int_0^R r^2\mathrm{d}r=\frac{\rho}{M}\frac{R^3}{3}[\sin\theta]_0^\pi=0$$

Ce résultat était prévisible puisque Oy est un axe de symétrie. Le centre de masse est donc situé sur Oy et a pour ordonnée :

$$Y=\frac{\rho}{M}\int\int_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\rho}{M}\int\int_\Delta r\sin\theta r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\frac{\rho}{M}\int_0^\pi\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^R r^2\mathrm{d}r=\frac{\rho}{M}\frac{R^3}{3}[-\cos\theta]_0^\pi$$

c'est-à-dire

$$Y=\frac{2}{3}\frac{\rho}{M}R^3$$

Or $M=\int\int_D\rho\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\rho\int\int_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\pi R^2\rho\Rightarrow\frac{\rho}{M}=\frac{2}{\pi R^2}$. Finalement :

$$Y=\frac{4}{3\pi}R\approx 0.4244R$$

8. Le domaine d'intégration est facile à représenter. On a :

$$\begin{aligned}
\int\int_D\frac{1}{(x+y)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_1^2\mathrm{d}x\int_1^{3-x}\frac{1}{(x+y)^2}\mathrm{d}y \\
&= \int_1^2\mathrm{d}x\left[-\frac{1}{(x+y)}\right]_1^{3-x} \\
&= \int_1^2\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x \\
&= \left[\log(x+1)-\frac{x}{3}\right]_1^2=\log\frac{3}{2}-\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

9. Soit $I = \int\int_D \frac{xy}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. On passe en coordonnées polaires :

$$\begin{aligned}
I &= \int\int_\Delta \frac{r^2\cos\theta\sin\theta}{r^2} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{\pi/4} \cos\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta \int_0^{\frac{a}{\cos\theta}} r\mathrm{d}r \\
&= \int_0^{\pi/4} \frac{a^2}{2\cos^2\theta}\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{a^2}{2}\int_0^{\pi/4}\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\mathrm{d}\theta \\
&= -\frac{a^2}{2}[\log(\cos\theta)]_0^{\pi/4} \\
&= \frac{a^2}{2}\log\sqrt{2} = \frac{a^2}{4}\log 2
\end{aligned}$$

10. Soit $I = \int\int_D \frac{1}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.
On a $I = \int_0^1 \mathrm{d}y\int_{1-y}^1 \frac{1}{x+y}\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{d}y[\log(x+y)]_{1-y}^1 = \int_0^1 \log(1+y)\mathrm{d}y$.
On intègre par parties : $\left(\int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u\right)$ en posant $\mathrm{d}v = \mathrm{d}y \Rightarrow v = y$ et $\log(1+y) = u \Rightarrow \mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}y}{1+y}$

$$\begin{aligned}
I &= [y\log(1+y)]_0^1 - \int_0^1 \frac{y}{1+y}\mathrm{d}y \\
&= \log 2 - \int_0^1 \frac{1+y}{1+y}\mathrm{d}y + \int_0^1 \frac{1}{1+y}\mathrm{d}y \\
&= \log 2 - [y]_0^1 + [\log(1+y)]_0^1 \\
&= 2\log 2 - 1 \approx 0.3863
\end{aligned}$$

11. Soit $I = \int\int\int_D z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.
L'espace étant muni d'un repère orthonormé d'origine O, le domaine d'intégration peut être représenté par l'ensemble des points situés à l'intérieur d'une sphère de centre O et de rayon R. La symétrie de révolution autour de l'axe Oz suggère le passage aux coordonnées cylindres, c'est-à-dire le changement : $x = r\cos\theta$; $y = r\sin\theta$; $z = z$. Le domaine d'intégration Δ étant défini par $0 \leq 2\pi$, $0 \leq r \leq R$, $z^2 + r^2 \leq R^2$.
Le Jacobien de cette transformation est $\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$
D'où $|J| = |r| = r$.
finalement

$$I = \int\int\int_\Delta z^2 r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R r\mathrm{d}r\int_{-\sqrt{R^2-z^2}}^{\sqrt{R^2-r^2}}\mathrm{d}z = 2\pi\int_0^R \frac{2}{3}(R^2-r^2)^{3/2} r\mathrm{d}r$$

D'où $I = \frac{2\pi}{3}\left[-\frac{2}{5}(R^2-r^2)^{5/2}\right]_0^R = \frac{4}{15}\pi R^5$

12. Soit $I = \int\int\int_V z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.
    On remarque que $x+y+z \geq 0 \Rightarrow a \geq 0$. Les triplets (x,y,z) du domaine V sont tels que :
    - $0 \leq x \leq a-y-z$
    - $0 \leq y \leq a-z$ la condition 12 impliquant $a-y-z \geq 0 \Rightarrow y \leq a-z$
    - $0 \leq z \leq a$ la condition 12 impliquant $a-z \geq 0 \Rightarrow z \leq a$

    On en déduit $I = \int_0^a z\mathrm{d}z \int_0^{a-z}\mathrm{d}y\int_0^{a-y-z}\mathrm{d}x = \int_0^a z\mathrm{d}z\int_0^{a-z}(a-y-z)\mathrm{d}y$

    $$\int_0^a z\mathrm{d}z\left[(a-z)y-\frac{y^2}{2}\right]_0^{a-z} = \int_0^a \frac{1}{2}(a-z)^2 z\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\left[a^2\frac{z^2}{2}-2a\frac{z^3}{3}+\frac{z^4}{4}\right]_0^a = \frac{a^4}{24}$$

    L'espace étant muni d'un repère orthonormé, le domaine d'intégration V peut être représenté par une pyramide de sommet O.

13. Soit $I = \int\int\int_V (x+y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.
    L'espace étant muni d'un repère orthonormé $Oxyz$, le domaine d'intégration V peut être représenté par l'ensemble des points situés à l'intérieur d'un cylindre de révolution autour de l'axe Oz. On a :

    $$\begin{aligned} I &= \int_{-R}^{R}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}\mathrm{d}y\int_{-h}^{h}(x+y+z)\mathrm{d}z \\ &= \int_{-R}^{R}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}\left[xz+yz+\frac{z^2}{2}\right]_{-h}^{h}\mathrm{d}y \\ &= \int_{-R}^{R}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}2h(x+y)\mathrm{d}y \\ &= \int_{-R}^{R}2h\mathrm{d}x\left[xy+\frac{y^2}{2}\right]_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \\ &= \int_{-R}^{R}2h2x\sqrt{R^2-x^2}\mathrm{d}x \end{aligned}$$

    D'où

    $$I = 2h\left[-\frac{2}{3}(R^2-x^2)^{3/2}\right]_{-R}^{R} = 0$$

    On aurait pu obtenir le même résultat en passant en coordonnées cylindriques (voir exercice 11).

14. On choisit un repère orthonormé $Oxyz$ dont l'origine est le sommet du cône et Oz l'axe de révolution. Soit D l'ensemble des triplets (x,y,z) correspondant aux points situés à l'intérieur du cône. On désignera par : V le volume du cône, ρ sa masse spécifique (constante), M sa masse, I son moment d'inertie par rapport à Oz, et $G(X,Y,Z)$ son centre de masse. On a :

    $$V = \int\int\int_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int\int\int_\Delta r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$$

en passant en coordonnées cylindriques.
Le domaine d'intégration Δ est défini par $\{0 \leq \theta \leq 2\pi\,;\, 0 \leq z \leq H\,;\, 0 \leq r \leq \frac{R}{H}z\}$.
Donc $V = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^H \mathrm{d}z \int_0^{\frac{R}{H}z} r\mathrm{d}r = 2\pi\frac{1}{2}\int_0^H \frac{R^2}{H^2}z^2\mathrm{d}z = \pi\frac{R^2}{H^2}\left[\frac{z^3}{3}\right]_0^H = \frac{1}{3}\pi R^2 H$
On a $M = \int\int\int_D \rho\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \rho V = \frac{1}{3}\pi R^2 H\rho$
On a $I = \int\int\int_D \rho(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \rho\int\int\int_\Delta r\times r^2\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z = \rho\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^H\mathrm{d}z\int_0^{\frac{R}{H}z} r^3\mathrm{d}r = 2\pi\rho\frac{1}{4}\int_0^H \frac{R^4}{H^4}z^4\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\pi\rho\frac{R^4}{H^4}\frac{H^5}{5} = \frac{1}{10}\pi\rho R^4 H = \frac{3}{10}MR^2$
Le cône étant homogène, il est évident que le centre de masse $G(X,Y,Z)$ est sur l'axe Oz, donc $X = Y = 0$ (à vérifier). On a :
$Z = \frac{1}{M}\int\int\int_D \rho z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \frac{\rho}{M}\int\int\int_\Delta zr\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z = \frac{\rho}{M}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^H z\mathrm{d}z\int_0^{\frac{R}{H}z} r\mathrm{d}r = \frac{\rho}{M}2\pi\frac{1}{2}\int_0^H \frac{R^2}{H^2}z^3\mathrm{d}z = \pi\frac{\rho}{M}\frac{R^2}{H^2}\left[\frac{z^4}{4}\right]_0^H = \frac{1}{4}\pi\frac{\rho}{M}R^2H^2 = \frac{3}{4}H$

15. Il est clair que l'on a : $J = \int\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2}\mathrm{d}y = I\times I = I^2$ en posant $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}u^2}\mathrm{d}u$

    Or si on passe en coordonnées polaires, on : $J = \int\int_\Delta e^{-\frac{1}{2}r^2}r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$ où Δ est défini par : $\{0 \leq \theta \leq 2\pi,\, r \geq 0\}$
    donc $J = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}r^2}r\mathrm{d}r = [\theta]_0^{2\pi}\left[-e^{-\frac{1}{2}r^2}\right]_0^{+\infty} = 2\pi\times 1 = 2\pi$
    On en déduit $I = \sqrt{2\pi}$ et donc $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}u^2}\mathrm{d}u = 1$

16. On a $S = \int\int_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ où D est défini par $x^2+y^2 \leq R^2$. En passant en coordonnées polaires, on obtient : $S = \int\int_\Delta r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$ où Δ est défini par $\{0 \leq \theta \leq 2\pi,\, r \leq R$
    donc $S = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R r\mathrm{d}r = [\theta]_0^{2\pi}\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^R = \pi R^2$

17. On a : $V = \int\int\int_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ où D est défini par $x^2+y^2+z^2 \leq R^2$. En passant en coordonnées polaires, on obtient : $V = \int\int\int_\Delta r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$ où Δ est défini par $\{0 \leq \theta \leq 2\pi,\, 0 \leq r \leq R,\, z^2+r^2 \leq R^2\}$
    donc $V = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R r\mathrm{d}r\int_{-\sqrt{R^2-r^2}}^{\sqrt{R^2-r^2}}\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R r2\sqrt{R^2-r^2}\mathrm{d}r = 2\pi\left[-\frac{2}{3}(R^2-r^2)^{3/2}\right]_0^R = \frac{4}{3}\pi R^3$

Annexe B

Formulaire

1 Trigonométrie

$\pi = 3.14159265358...$

$$\begin{array}{llll}
\cos(-x) = \cos(x) & \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x) & \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x) & \cos(x+\pi) = -\cos(x) \\
\sin(-x) = -\sin(x) & \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x) & \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x) & \sin(x+\pi) = -\sin(x) \\
\tan(-x) = -\tan(x) & \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan(x)} & \tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\frac{1}{\tan(x)} & \tan(x+\pi) = \tan(x)
\end{array}$$

$\cos(x + 2\pi) = \cos(x) \qquad \sin(x + 2\pi) = \sin(x)$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\tan(x)$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0

$\cot(x) = \frac{1}{\tan(x)}$

$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$

- $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
- $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$
- $\tan(a+b) = \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$

- $\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$
- $\sin(p) + \sin(q) = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$
- $\cos(p) - \cos(q) = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$
- $\sin(p) - \sin(q) = 2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$

- $\cos^2(a) = \frac{1}{1+\tan^2(a)}$
- $\sin^2(a) = \frac{\tan^2(a))}{1+\tan^2(a)}$

- $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a)$
  $= 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a)$
  $= \frac{1-\tan^2(a)}{1+\tan^2(a)}$
- $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$
  $= \frac{2\tan(a)}{1+\tan^2(a)}$
- $\tan(2a) = \frac{2\tan(a)}{1-2\tan(a)}$

- $\cos(3a) = 4\cos^3(a) - 3\cos(a)$
- $\sin(3a) = 3\sin(a) - 4\sin^3(a)$

2 Fonctions élémentaires

2.1 Fonctions trigonométriques

- si $0 \leq y \leq \pi$ et $-1 \leq x \leq 1$:
  - $y = \arccos(x) \Longleftrightarrow x = \cos(y)$
  - $\arccos(\cos(y)) = y$
  - $\cos(\arccos(x)) = x$
  - $(\cos(x))' = -\sin(x)$
  - $(\arccos(x))' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

- si $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ et $-1 \leq x \leq 1$:
  - $y = \arcsin(x) \Longleftrightarrow x = \sin(y)$
  - $\arcsin(\sin(y)) = y$
  - $\sin(\arccos(x)) = x$
  - $(\sin(x))' = \cos(x)$
  - $(\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

- si $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$:
  - $y = \arctan(x) \Longleftrightarrow x = \tan(y)$
  - $\arctan(\tan(y)) = y$
  - $\tan(\arctan(x)) = x$
  - $(\tan(x))' = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$
  - $(\arctan(x))' = \frac{1}{1+x^2}$

2.2 Logarithme népérien

- $(\ln(x))' = \frac{1}{x}, x > 0$
- $\ln(1) = 0$
- $ln(e) = 1$
- $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$

- $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$

$e = 2.71828182845...$

2.3 Exponentielle

Si $y > 0$:
- $y = e^x \iff x = \ln(y)$
- $e^{\ln(y)} = y$
- $\ln(e^x) = x$
- $e^{a+b} = e^a e^b$
- $e^0 = 1$
- $e^{-a} = {}^1\!/\!_{e^a}$
- $(e^x)' = e^x$

2.4 Puissance

$$a^b = e^{b\ln(a)}$$

Si $a > 0$:
- $a^{x+y} = a^x a^y$
- $a^0 = 1$
- $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$
- $(a^x)^y = a^{xy}$
- $(a^x)' = a^x \ln(a)$

Si $x > 0$:
- $x^{\alpha+b} = x^\alpha x^\beta$
- $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$

3 Fonctions

3.1 Dérivées

$$f' = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \mathrm{D}f$$

- $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$
- $(e^{ax})' = ae^{ax}$ $(a \in \mathbb{C})$
- $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$
- $(\cos(x))' = -\sin(x)$
- $(\sin(x))' = \cos(x)$
- $(\tan(x))' = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$

- $(\arccos(x))' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\arctan(x))' = \frac{1}{1+x^2}$
- $(f+g)' = f' + g'$
- $(\lambda f)' = \lambda f'$, $(\lambda \in \mathbb{R})$
- $(fg)' = f'g + fg'$
- $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$
- $(f \circ g)' = (f' \circ g)g'$
- $[f(g(x))]' = f'(g(x))g'(x)$
- $f(a+h) - f(a) = hf'(a) + h\epsilon(h)$ où $\epsilon(h) \to 0$ si $h \to 0$
- f est la fonction réciproque de g ($y = g(x) \iff x = f(y)$) : $g'(x) = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{f'(g(x))}$

3.2 Formule de Taylor

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a) + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a+\theta h)$$

si $f^{(n)}$ continue en a :

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a) + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a) + x^n\epsilon(x)$$

où $\epsilon(x) \to 0$ si $x \to 0$ (développement de f au voisinage de a)

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a+\theta h)$$

(cas $n = 1$: formule des accroissements finis)

3.3 Développements usuels au voisinage de 0

- $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + x^n\epsilon(x)$
- $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n}\epsilon(x)$
- $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+1}\epsilon(x)$
- $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + x^n\epsilon(x)$
- $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + x^n\epsilon(x)$
- $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + x^{2n}\epsilon(x)$
- $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1} + x^{n+1}\epsilon(x)$
- $\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + x^{2n+1}\epsilon(x)$
- $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}x^3 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(a-n+1)}{n!}x^n + x^n\epsilon(x)$
- $\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \frac{62}{2835}x^9 + x^9\epsilon(x)$

4 Primitives et Intégrales

4.1 Règles de calcul

- $\int_a^b (f(x)+g(x))\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$
- $\int_a^b \lambda f(x)\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$
- $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$
- $f(x) \leq g(x) \Longrightarrow \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$

4.2 Primitives élémentaires

- $\int x^\alpha \mathrm{d}x = \frac{x^\alpha}{\alpha+1} + C$, ($\alpha + 1 \neq 0$)
- $\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + C$
- $\int e^{ax}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}e^{ax} + C$
- $\int \cos(x)\mathrm{d}x = \sin(x) + C$
- $\int \sin(x)\mathrm{d}x = -\cos(x) + C$
- $\int \tan(x)\mathrm{d}x = -\ln|cos(x)| + C$
- $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan(x) + C$
- $\int \frac{2x}{1+x^2}\mathrm{d}x = \ln(1+x^2) + C$
- $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x) + C$

4.3 Procédés d'intégration

- changement de variables : $\int_a^b f(u(x))u'(x)\mathrm{d}x = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)\mathrm{d}u$
- intégration par parties : $\int_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\mathrm{d}x$
- fractions rationnelles : développer en éléments simples.

4.4 Intégrales définies généralisée

- $\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^a f(t)\mathrm{d}t + \int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$, ($a$ quelconque)
- $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \lim_{x\to b} \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ (f non continue en b)
- $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha-1}$ pour $\alpha > 1$
- $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\mathrm{d}x = +\infty$ pour $\alpha \leq 1$
- $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\mathrm{d}x = \frac{1}{1-\alpha}$ pour $\alpha < 1$
- $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\mathrm{d}x = +\infty$ pour $\alpha \geq 1$

5 Fonctions de plusieurs variables

- Fonctions de deux variables : $(x, y) \mapsto f(x, y)$
- Fonctions de trois variables : $(x, y, z) \mapsto f(x, y, z)$
- Fonctions de n variables : $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

5.1 Dérivées partielles

- $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = f'_x = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$
- $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = f'_y = \lim_{k \to 0} \frac{f(x_0, y_0+k) - f(x_0, y_0)}{k}$
- $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{x^2}$
- $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{xy}$
- $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f''_{yx}$
- $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_{y^2}$

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$$

6 L'alphabet grec

A	α	alpha
B	β	béta
Γ	γ	gamma
Δ	δ	delta
E	ε	epsilon
Z	ζ	zeta
H	η	éta
Θ	θ	theta
I	ι	iota
K	κ	kappa
Λ	λ	lambda
M	μ	mu
N	ν	nu
Ξ	ξ	xi
O	o	omicron
Π	π	pi
P	ρ	rho
Σ	σ	sigma
T	τ	tau
Υ	υ	upsilon
Φ	ϕ	phi
X	χ	chi
Ψ	ψ	psi
Ω	ω	oméga